

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Hatırlatmalar

ÜSLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- 1) $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ dir.
Her a reel sayısı için $a^1 = a$ dır.
 $x \neq 0$ için $0^x = 0$ dır.
 0^0 ifadesi tanımsızdır.

NEGATİF KUVVET (ÜS)

- 2) $(a)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ veya $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ dir.

Örneğin; $(5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

ÇARPMA BÖLME İŞLEMİ

- 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$ 6) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

TOPLAMA ÇIKARMA İŞLEMİ

- 7) $k \cdot a^n + m \cdot a^n - n \cdot a^n = a^n(k+m-n)$

KUVVETİN KUVVETİ

- 8) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ dir.
 $(a^n)^m \neq a^{(n^m)} \neq a^{n^m}$ (genellikle)

ÜSLÜ İFADE EŞİTLİĞİ

- 9) $a^n = a^m$ ise $n=m$ dir.

Örnek...1 :

$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^{40} = \frac{1}{81^x}$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

Örnek...2 :

$(216)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...3 :

$7^{x+2} = 35^{1+x}$ olduğuna göre 25^{x+2} değeri kaç eşittir?

Örnek...4 :

$\frac{1}{1-m^n} + \frac{1}{1-m^{-n}} = 7^{a-1}$ olduğuna göre a kaç eşittir?

Örnek...5 :

$A = \underbrace{3^4 + 3^4 + 3^4 + \dots + 3^4}_{x \text{ tane}}$, $B = \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot 3^4}_{x \text{ tane}}$ ve

$\frac{B \cdot x}{A} = 27^{56}$ olduğuna göre eşitliğini sağlayan değeri kaç eşittir?

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

ÜSTEL FONKSİYON VE LOGARİTMA FONKSİYONU

$a^b=c$ eşitliğini düşünelim.

Mümkün olan durumlarda;

Durum 1: a ve b biliniyorsa c üs alma işlemiyle bulunabilir. Örneğin $2^5=c$ ise $c=32$ dir.

Durum 2: b ve c biliniyorsa a kök alma işlemiyle bulunabilir. Örneğin $a^2=7$ ise $a=\sqrt{7}$ dir.

Bu işlemleri daha önceden görmüştük.

Durum 3: a ve c biliniyorsa b logaritma alma işlemiyle bulunabilir. $2^b=7$ eşitliğinin çözümü logaritmayla $b=\log_2 7$ olarak elde edilir. (Bazı özel durumlarda logaritma işlemi yapmaya gerek kalmadan da çözüm bulunabilir. Örneğin $2^b=8$ gibi.)

SONUÇ

Logaritma daha önceden çözemediğimiz $a^x=b$ gibi denklemleri çözmeyen aracıdır. Logaritma alma işlemi kabaca üs alma işleminin tersi olarak düşünülebilir. Logaritma alma işlemine başlamadan önce üstel fonksiyonları inceleyelim.

ÜSTEL FONKSİYON

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon denir.

Örnek...6 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=2^x$ üstel fonksiyonu için $f(5)$ kaçtır?

Örnek...7 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ üstel fonksiyonu için $f(5)=243$ tür. Buna göre, a kaçtır?

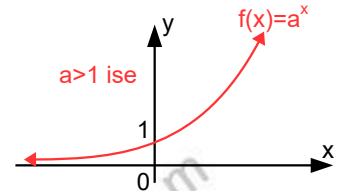
Örnek...8 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=2^x$ fonksiyonuna ait tabloyu doldurup oluşan ikililere göre grafiğini çiziniz?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

GENELLEME

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ fonksiyonu $a>1$ için artandır. Şekli inceleyiniz.



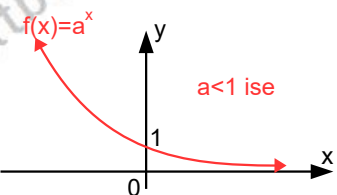
Örnek...9 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ fonksiyonuna ait tabloyu doldurup oluşan ikililere göre grafiğini çiziniz?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

GENELLEME

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ fonksiyonu $0<a<1$ için azalandır. Şekli inceleyiniz.



LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

ÖZET OLARAK

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu;

1) $a > 1$ için artandır.

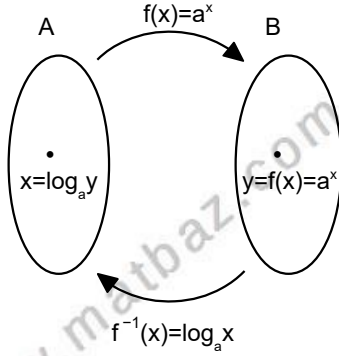
2) $0 < a < 1$ için azalandır.

3) Bire bir fonksiyondur.

4) Değer kümesi \mathbb{R}^+ alınırsa örtendir. Bundan dolayı $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ için $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu tanımlıdır ve bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu denir.

LOGARİTMA FONKSİYONU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyona sahip olduğunu biliyoruz. Söz konusu ters fonksiyona **logaritma** fonksiyonu denir ve $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ ile gösterilir. Şekli inceleyiniz.

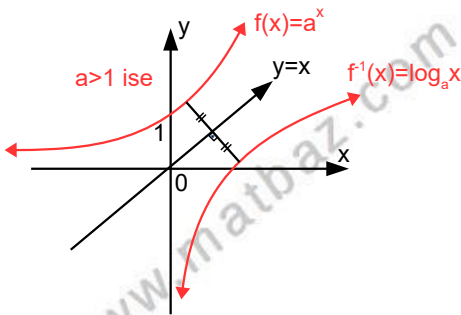


yukarıdaki eşlemeyi sembolik olarak

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ olarak yazabiliriz.

Örneğin uygun şartlarda tanımlı $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = \log_2 x$ fonksiyonları birbirlerinin tersleridir.

$f(x) = a^x$ ile $g(x) = \log_a x$ fonksiyonları birbirlerinin ters fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. Şekli inceleyiniz.



UYARI 1

1) $\log_a x$ ifadesi " a tabanında x in logaritması" diye okunur.

2) $\log_a x$ yazılışı a'nın hangi kuvveti x olur şeklinde yorumlanabilir.

Örneğin $\log_2 8$ ifadesinin eşitini bulmak için **ya** 2 sayısının hangi kuvveti 8 yapar diye düşünürüz **ya da** $\log_2 8 = x$ olsun diyerek logaritma ve üstel ifadeyi birbirine bağlayan $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ eşitliğinden yola çıkar $2^x = 8$ denklemini mümkünse çözer ve x'i buluruz. (Daha sonra logaritma özelliklerini öğrendiğimizde farklı bir düşünüşle de sonuca gidebiliriz.)

Örnek...10 :

$\log_2 x = 4$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...11 :

$\log_5 3025$ kaçtır?

Örnek...12 :

$\log_k 9 = 2$ olduğuna göre, k kaçtır?

Örnek...13 :

$\log_2 (x+5) = 7$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...14 :

$\log_4 (16) = x$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...15 :

$\log_{\sqrt{2}} (8) = x$ olduğuna göre, x kaçtır?

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek...16 :

$\log_{\frac{1}{25}}(125)=x$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...17 :

$\log_3 81=2x-3$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...18 :

$\log_3 1=\frac{2}{x}-3$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...19 :

$\log_5 \frac{x-1}{x-2}=-1$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...20 :

$\log_2 [3+2\log_3(x+1)]=1$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...21 :

$4^{\frac{x-2}{3}}=128$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...22 :

$5^x=8$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...23 :

$7^{x+2}=15$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...24 :

$6^{2x+5}-2=17$ olduğuna göre, x kaçtır?

Örnek...25 :

Uygun şartlarda $f(x)=5^{x+1}-2$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...26 :

Uygun şartlarda $f(x)=3^{x-2}+4$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...27 :

Uygun şartlarda $f(x)=7^{2x-3}+5$ fonksiyonu veriliyor. $f^{-1}(12)=?$

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek...28 :

$$f:(3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x-3)$$

fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...29 :

$$f:(-5,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x+5)-2$$

fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

Örnek...30 :

$$f:(-3,\infty)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\log_2(2x+6)-2$$

fonksiyonu için $f^{-1}(4)=?$

UYARI 2

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna onluk (bayağı) logaritma fonksiyonu denir.

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$, $f(x)=\log_{10}x$ fonksiyonu $f(x)=\log x$ ile de gösterilebilir. (Yani taban belirtilmemişse 10 alınır)

Örnek...31 :

$\log 100=x$ ise x kaçtır?

Örnek...32 :

$$\log(0,001)=2x+7 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

Tabloyu inceleyiniz.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2	-2	4
10	2,5937..	-10	2,8679.
10^2	2,7048..	-10^2	2,7319..
10^6	2,7182..	-10^6	2,7182..

Tabanı e (Euler sayısı) değeri 2,7182.. olan irrasyonel sayı olan logaritma fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir ve $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$, $f(x)=\log_e x = \ln x$ ile gösterilir.

Örnek...33 :

$$\ln(\log x)=0 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

Örnek...34 :

$$f:\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\ln(4-3x)-2$$

fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

LOGARİTMA FONKSİYONUNUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

Bir fonksiyon için en geniş tanım kümesi, fonksiyonunun bağımsız değişkeninin (genelde x) seçilebileceği en büyük kümedir.

$f(x)=\log_{h(x)}g(x)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesi

i) $g(x)>0$ ii) $h(x)>0$ iii) $h(x)\neq 1$ ifadelerini sağlayan x değerlerinin kümesidir.

Özetlersek, taban ve logaritması alınan sayı pozitif olmalı, taban pozitifken 1 olmamalıdır.

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek...35 :

$f(x)=\log_2(x-2)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Örnek...36 :

$f(x)=\log_{8-x}(x+5)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Örnek...37 :

$f(x)=\log_{x^4}(x^2-8x+15)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Örnek...38 :

$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x^2-64}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde kaç tane negatif tam sayı vardır?

Örnek...39 :

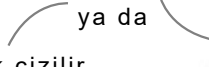
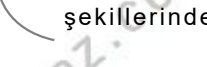
$f(x)=\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+m)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi reel sayılar kümesi ise m nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Örnek...40 :

$f(x)=\log_{\pi}(x^2+5x+m)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}-\{k\}$ kümesi ise m-k kaçtır?

Örnek...41 :

$f(x)=\log_a(mx+n)$ fonksiyonunun grafiği çizilirken

- tanım kümesi bulunur
- $mx+n=0$ için grafiğin x eksenini kestiği nokta $(x_0,0)$ bulunur
- $mx+n=a$ için grafiğin geçtiği $A(x_1,1)$ noktası bulunur
- $mx+n$ ifadesinin durumuna göre göre grafik  ya da  şekillerinden biri olarak çizilir.

Yukarıda verilenlere göre $f(x)=\log_2(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

LOGARİTMA - 1

ÜSTEL FONKSİYON - LOGARİTMA FONKSİYONU

DEĞERLENDİRME

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = (a+2)^x$ üstel fonksiyonu için $f(3) = 1331$ dir. Buna göre, a kaçtır?
- 2) $\log_{\sqrt{5}}(125) = x$ ve $\log_2(x-2) = a$ ise x , a nın kaç katıdır?
- 3) $\log[8 + \log_2[3 + 2\log_3(x-1)]] = 1$ olduğuna göre, x kaçtır?
- 4) $7^{x+5} - 2 = 13$ olduğuna göre, x kaçtır?
- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 5^{3x+2} - 7$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?
- 6) $f: (-\frac{2}{5}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(5x+2) + 7$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?
- 7) $f(x) = \log_{x^2-x+1}(x^2+6x+5)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?
- 8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 4e^{x-2} + 3$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz?

LOGARİTMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

ÖZELLİK 1

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \log_a 1 = 0$$

İSPAT

Örnek...1 :

$$\log_x 1 = ?$$

Örnek...2 :

$\log_{2x-3}(4a+5) = 0$ ise $a+x$ tam sayı olarak en az kaçtır?

ÖZELLİK 2

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \log_a a = 1$$

İSPAT

Örnek...3 :

$$\log_{20} 20 + \log_{21} 21 + \dots + \log_{57} 57 = ?$$

ÖZELLİK 3

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ olmak üzere,}$$
$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Örnek...4 :

$$\log 2 + \log 5 = ?$$

Örnek...5 :

$$\log_{36} 2 + \log_{36} 3 + \log_{36} 6 = ?$$

Örnek...6 :

$\log 2 = a, \log 3 = b$ ise $\log 6$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

Örnek...7 :

$\log 2 = m$ ve $\log 13 = n$ ise $\log 1040$ sayısının m ve n türünden eşiti nedir?

Örnek...8 :

$\log 2 = a, \log 60 = b$ ise $\log 3$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

Örnek...9 :

$\log 2 = k$ ise $\log 5$ sayısının k türünden eşiti nedir?

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

Örnek...10 :

$\log_2 31! = k$ $\log_2 32!$ ifadesinin k türünden eşiti nedir?

Örnek...11 :

$\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -1$ eşitliğini sağlayan pozitif en küçük x açısı kaç derecedir?

UYARI

özellik 3 ün sonucu olarak $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Örnek...12 :

$\log 2400 = a$ ve $\log 3 = b$ ise $\log 2$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

Örnek...13 :

$$\log_2 \sqrt[7]{16} + \log_3 \sqrt[5]{9} + \log_5 \frac{1}{25} = ?$$

Örnek...14 :

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \log \frac{999}{1000} = ?$$

Örnek...15 :

$$\log_{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}} \sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\dots}}}$$

Örnek...16 :

$a^n = b^x$ ise $\frac{n}{m} = \frac{x}{y}$ olduğunu gösteriniz?
 $a^m = b^y$

Örnek...17 :

$$2^{x+1} = 5^{3+y} \text{ ise } y-5x \text{ kaçtır?}$$
$$25^{y-2} = 4^x$$

ÖZELLİK 4

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

Örnek...18 :

$\log \left(\frac{a \cdot b}{c} \right)$ ifadesinin a , b ve c nin logaritmaları türünden eşiti nedir?

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

Örnek...19 :

$\log \frac{m}{n \cdot \sqrt{k}}$ İfadesini m, n ve k nin logaritmaları türünden eşiti nedir?

Örnek...20 :

$3\log m + 2\log n - 4\log k$ ifadesini tek bir sayının logaritması türünden yazınız.

Örnek...21 :

$\log m - \log n = 2$ ise m sayısının n türünden eşiti nedir?

Örnek...22 :

$3^x = 7$ ve $3^y = 63$ ise $y - x$ nedir?

2

ÖZELLİK 5 (TABAN DEĞİŞTİRME ÖZELLİĞİ)

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \dots$$

Örnek...23 :

$\log_2 3$ sayısını 3 farklı tabanda yazınız.

Örnek...24 :

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot \log_{80} 81 = ?$$

Örnek...25 :

$$\log_{\sqrt{2}} 5 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{49} \cdot \log_{\frac{7}{5}} 256 = ?$$

UYARI 1:

Taban değiştirme özelliğinin sonucu olarak $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ yazabiliriz.

Örnek...26 :

$$\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_5 70} + \frac{1}{\log_7 70} = ?$$

Örnek...27 :

$$\log_p x = 4, \log_m x = 5 \text{ ise } \log_{p \cdot m} x = ?$$

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

UYARI 2

Taban değiştirme özelliğinin sonucu olarak $\log_a^n b = \frac{1}{n} \log_a b$ yazabiliriz.

Bu ifade daha önceki özelliklerle birleřtirerek daha genel $\log_a^n b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b$ ifadesi yazılabilir.

Örnek...28 :

$$\log_p r = 2 \text{ ise } \log_{p^2} r^3 + \log_{p^3} r^4 + \log_{\frac{1}{p^5}} \left(\frac{1}{r^2} \right) = ?$$

Örnek...29 :

$$\log_{32} 128 + \log_{0,25} 0,125 = ?$$

Örnek...30 :

$$\sqrt[5]{x^3} = \sqrt[4]{y^7} \text{ ise } \log_x y = ?$$

Örnek...31 :

$\log 7 = x$ ve $\log 11 = y$ ise $\log_{11} 49$ x ve y türünden nedir?

Örnek...32 :

$\log 3 = x$ ve $\log 72 = y$ ise $\log_{12} 6$ x ve y türünden nedir?

Örnek...33 :

$\log_3 5 = x$ ve $\log_5 7 = y$ ise $\log_7 3$ x ve y türünden nedir?

Örnek...34 :

$\log_3 5 = x$ ise $\log_5 675$ x türünden nedir?

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

Örnek...35 :

$\log_3 30 = m$ ve $\log_3 25 = n$ ise $\log_6 450$ m ve n türünden nedir?

Örnek...38 :

$$e^{\ln 9} + 3^{2 + \log_3 5} = ?$$

ÖZELLİK 6

$$i) a^{\log_a b} = b$$

$$ii) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Örnek...36 :

$$3^{\log_3 4} + 6^{\log_3 7} = ?$$

Örnek...37 :

$$7^{\log_7 5} + 25^{\log_5 2} + \sqrt{7^{\log_7 16}} = ?$$

Örnek...39 :

$$e^{2 \ln 5} + 9^{1 + \log_3 4} = ?$$

DEĞERLENDİRME

1) $\ln \tan x + \ln \cot x = ?$

2) $\log_2 \sec x + \log_2 \operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?

3) $\log 13 = a$, $\log 2 = b$ ise $\log 1352$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

4) $\log_{36} 2 \cdot \log_{36} 3 = p$ ise $\log_{36}^2 2 + \log_{36}^2 3$ ifadesinin p türünden eşiti nedir?

5) $\frac{1}{4} \log m + \frac{2}{3} \log n - \log k$ ifadesini tek bir sayının logaritması türünden yazınız

6) $\log 3 = a$ ve $\log 18 = y$ ise $\log_{72} 12$ a ve y türünden nedir?

7) $\sqrt{\log^2 3 + \log 90} = \log x$ ise x kaçtır?

8) $\log_{(\sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x^7} \dots)} (\sqrt[5]{x^2}) = ?$

9) $\log 3 = x$, $\log 4 = n$ ise $\log_{20} 30$ sayısını x ve n cinsinden ifade ediniz?

10) $e^{2 \ln(2x-3)} = 4$ x kaç olabilir?

LOGARİTMA – 3 (ÜSTLÜ- LOGARİTMALİ DENKLEMLER)

ÜSLÜ DENKLEMLER

$$1) [f(x)]^n = [f(x)]^m \Leftrightarrow n=m$$

Örnek...1 :

$$64^{4x-3} = 512^{x-2} \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

Örnek...2 :

$$6 \cdot 2^{x-3} + 3 \cdot 2^{x-2} - 2^x = 2048 \text{ ise } x \text{ kaçtır?}$$

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ (n tek)}$$

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \text{ (n çift)}$$

Örnek...3 :

$$(5x+1)^{43} = (2x+8)^{43} \text{ ise } x \text{ kaç olabilir?}$$

Örnek...4 :

$$(2x-1)^2 = (x-5)^2 \text{ ise } x \text{ kaç olabilir?}$$

Örnek...5 :

$$(x-2)^6 = x^3 \text{ ise } x \text{ kaç olabilir?}$$

$$[f(x)]^{g(x)} = 1 \text{ için 3 durum mümkündür.}$$

i) $f(x)=1$ ve $g(x)$ her reel değeri alabilir

ii) $f(x)=-1$ ise $g(x)$ çift tam sayı

iii) $g(x)=0$ ise $f(x) \neq 0$ yeterlidir.

Örnek...6 :

$$(x-2)^{x^2-16} = 1 \text{ ise } x \text{ kaç olabilir?}$$

Örnek...7 :

$$(x-3)^{x^2-9} = 1 \text{ ise } x \text{ kaç olabilir?}$$

LOGARİTMALİ DENKLEMLER

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0, g(x) > 0$ iki fonksiyon olmak üzere,

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

UYARI

Herhangi bir logaritmalı denklemi genellemedeki bağıntıları kullanarak çözmeden önce mutlaka tanım kümelerini belirtmek gerekir. Toplam veya fark ifadelerinden çarpım veya bölüme dönüşen ifadeler ilk halleriyle tanımlı olmak zorundadır.

LOGARİTMA – 3
(ÜSTLÜ- LOGARİTMALİ DENKLEMLER)

Örnek...8 :

$$\log_2(3x+1)=4$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...9 :

$$\log_{(2-x)}(4)=2$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...10 :

$$\log_x(x^2-x+1)=1$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...11 :

$$\log_{18}(x-4)+\log_{18}(x+3)=1$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...12 :

$$\log_3(2x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(3x+2)=1$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...13 :

$$\log(x^2)+\log(3x)=\log 30$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...14 :

$$\log_3^2(5x+1)-\log_3(5x+1)=20$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...15 :

$$\log(x+y)=\log x+\log y$$

ise y nin x türünden eşiti nedir?

Örnek...16 :

$$\log_x(2x+8)=2$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

LOGARİTMA – 3
(ÜSTLÜ- LOGARİTMALİ DENKLEMLER)

Örnek...17 :

$$\log_2(a)+\log_4(a)+\log_8(a)+\dots+\log_{32}(a)=\frac{137}{15}$$

ise a kaçtır?

Örnek...18 :

$$\log_2(a).\log_4(a).\log_8(a)\dots\log_{32}(a)=\frac{4}{15}$$

ise a kaçtır?

Örnek...19 :

$\log(x-3)-\log x=\log(2x-1)-\log 2x$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...20 :

$5^{\log_2 2}+2^{\log_2 25}=272$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

Örnek...21 :

$$5^{2x}+20=9.5^x$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...22 :

$$2^{\ln x^2}+2^{\ln x}-2=0$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz

UYARI

$(f(x))^a=g(x)^b$ türünden ifadelerde her iki tarafın logaritması alınarak çözüme gidilebilir.

Örnek...23 :

$x^{\log_3 x}=9x$ ise x kaç olabilir?

Örnek...24 :

$x^{\log_3 x}=x$ ise x kaç olabilir?

LOGARİTMA – 3
(ÜSTLÜ- LOGARİTMALİ DENKLEMLER)

DEĞERLENDİRME

1) $49^{4-2x}=343^{x-2}$ ise x kaçtır?

2) $(x+1)^{2048}=(2x+3)^{1024}$ ise x kaç olabilir?

3) $\log_{5-x}(25)=2$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

4) $\log_2(x+1)-\log_2(3x-2)=1$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

5) $\log^2(x+2)-4\log(x+2)=60$
denkleminin kökleri çarpımı yapıldığında elde edilen sayının tam kısmı kaç basamaklıdır?

6) $16^{\log x^2}=x$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

7) $e^x-4=12 \cdot e^{-x}$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

8) $\ln^2 x + \ln x^2 = 48$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

9) $(x+3)^{\log_2(x+3)}=16$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

ÜSTLÜ VE LOGARİTMALİ EŞİTSİZLİKLER

ÜSTLÜ EŞİTSİZLİKLER :

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

1) $a > 1, b < c \Leftrightarrow a^b < a^c$

2) $0 < a < 1, b < c \Leftrightarrow a^b > a^c$ biçimindedir.

UYARI

Taban 0 ile 1 arasındaysa eşitsizliğin yön değiştirdiğine dikkat ediniz.

Örnek...1 :

$$4^{3x-2} > 16^{x+1}$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Örnek...2 :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+32}$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Örnek...3 :

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{4-3x} > \left(\frac{1}{625}\right)^{x+1}$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

LOGARİTMALİ EŞİTSİZLİKLER:

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b, c \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0, g(x) > 0$ iki fonksiyon olmak üzere,

1) $a > 1, \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

2) $0 < a < 1, \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ biçimindedir.

UYARI

1) Taban 0 ile 1 arasındaysa eşitsizliğin yön değiştirdiğine dikkat ediniz.

2) $\log_a f(x) < g(x)$ türünden eşitsizlikler $\log_a f(x) < \log_a a^{g(x)}$ şeklinde düşünülürse çözüme gidilirken $f(x)$ ve $a^{g(x)}$ karşılaştırması kullanılabilir.

Örnek...4 :

$$\log_5(3x-2) < 2$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Örnek...5 :

$$\log_{\frac{1}{4}}(5x+4) < -3$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Örnek...6 :

$$\log_2 \frac{x+4}{x-2} < 1$$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

Örnek...7 :

$\log(x-2) < \log(x^2-2x)$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Örnek...8 :

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) < \log_{\frac{1}{3}}(x^3-x^2)$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Örnek...9 :

$\log_5(x) < \log_{25}(x^2-x)$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Örnek...10 :

$\log(x+1) + \log(x+2) < \log x^2$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Örnek...11 :

$5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} \geq \frac{2}{25}$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Örnek...12 :

$10 \log x < \log x^9$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Örnek...13 :

$$x < \log_2 100 < y$$

eşitsizliğinde x ve y ardışık iki sayı ise x+y kaçtır?

Örnek...14 :

$$x < \log_{\frac{1}{5}} 675 < y$$

eşitsizliğinde x ve y ardışık iki sayı ise x.y kaçtır?

Örnek...15 :

$$a = \log_5 60, \quad b = \log_6 35, \quad c = \log_{\frac{1}{7}} 28 \quad \text{ve} \quad d = \ln 40$$

sayılarını sıralayınız?

UYARI 1

Birden büyük bir sayının 10 luk logaritmasının tam kısmı, sayının ondalık yazılımındaki tam kısmının basamak sayısından 1 eksiktir.

Örneğin $x = \log(3.585.684,2356)$ ise

7 basamak

$x=6, \dots$ biçiminde bir sayıdır. Burada virgülden öncesi hesaplanabilir ama virgülden sonrası için hazır logaritma tabloları vardır.

Genel olarak bir sayının kaç basamaklı olduğunu bulmak istiyorsak sayının logaritmasının tam kısmını bulur ve bu değere 1 ekleriz.

Örnek...16 :

25896,356 sayısının onluk logaritmasının tam kısmı nedir?

Örnek...17 :

$\log 2 = 0,301$ ise 2^{200} sayısı kaç basamaklıdır?

Örnek...18 :

$\log 7 = 0,845$ ise 49^{50} sayısı kaç basamaklıdır?

Örnek...20 :

0,00001002 sayısının onluk logaritması a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere (a,b) aralığında ise a.b kaçtır?

UYARI 2

0 ile 1 arasında olan bir sayının logaritmasını hesaplamak istiyorsak, bu sayının virgülden sonraki 0 dan farklı ilk rakama kadar olan 0 adetinin sayısı n tane ise logaritması alınan sayının tam kısmı $-n$ olur.

Örneğin, 0,005 sayısının logaritmasını alırsak, $\log(0,005) = -2, \dots$ yazabiliriz.

Ya da 0,005 sayısı, $10^{-3} < 0,005 < 10^{-2}$ aralığında olduğundan

$\log 10^{-3} < \log(0,005) < \log 10^{-2}$ den
 $-3 < \log(0,005) < -2$ bulunur.

Örnek...19 :

0,0007 sayısının onluk logaritması a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere (a,b) aralığında ise a.b kaçtır?

DEĞERLENDİRME

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{243}\right)^{x+3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

2) $\log_2(x-2) < \log_2(x^2-2x)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

3) $\log_2\left(\frac{3x-2}{x+1}\right) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4) $\log_2\left(\frac{x-2}{x^2-2}\right) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

5) $2 < \log_3(x-2) \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

6) $\log_{\frac{1}{7}}(x) < \log_{\frac{1}{49}}(x^2-2x-8)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

LOGARİTMA-4
EŞİTSİZLİKLER

7) $f(x)=\log_2(4-\ln x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

8) $x < \log_7 112 < y$ eşitsizliğinde x ve y ardışık iki sayı ise $x-y$ kaçtır?

9) 4545,56 sayısının onluk logaritmasının tam kısmı nedir?

10) $\log 7=0,845$ ve $\log 2=0,301$ ise 28^{150} sayısı kaç basamaklıdır?

11) 0,00307 sayısının onluk logaritması a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere (a,b) aralığında ise $a \cdot b$ kaçtır?

12) $\log 3 \approx 0,477$ İse 300^{30} sayısı kaç basamaklıdır?

ÜSTEL VE LOGARİTMİK VE MODELLEME

Bileşik faiz, bir faiz döneminde kazanılan faizin ana paraya ilave edilerek her devre değişen ana para üzerinden hesaplanır. Örneğin bir kişi 100 TL yıllık %10 üzerinden faize yatırdığında

$$1. \text{ yıl sonu } 100 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 110$$

$$2. \text{ yıl sonu } 110 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 121$$

TL paraya sahip olur.

Bu ifadeyi $A + f = A \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t$ biçiminde modelleyebiliriz.

Jakob Bernoulli, e sabitini birleşik faiz problemini incelerken keşfetmiştir

Elinde 1 ₺ sı olan bir yatırımcı parasını yılda %100 faiz veren bir bankaya yatırır 1 sene sonra 2 ₺;

6 ayda bir %50 faiz veren bir bankaya yatırır 1 sene sonra 2,25 ₺;

3 ayda bir %25 faiz veren bir bankaya yatırır 1 sene sonra 2,44 ₺;

ayda bir % 8,33 faiz veren bir bankaya yatırır 1 sene sonra 2,61 ₺;

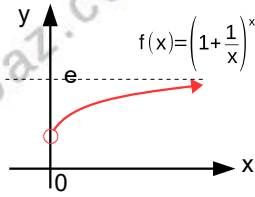
Her gün işleyen faiz veren bir bankaya günlük (100/360 lık faizle) yatırır 1 sene sonra 2,714516 ₺ sı olur.

Bu ifade $S = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ile modellenirse

(ana para 1 ₺) faizin işleme süresi uzadıkça, yıl sonundaki para 2 ve 3 arasında belli bir değere (2,714516 şeklinde devam eden irrasyonel bir sayıya) yaklaşmaktadır.

Tablodan da görüldüğü üzere yakınsanan değer e (Euler sabiti) sayısıdır.

x		x	
1	2	-2	4
10	2,5937..	-10	2,8679..
10 ²	2,7048..	-10 ²	2,7319..
10 ⁶	2,7182..	-10 ⁶	2,7182..



Örnek...1 :

Yıllık faiz oranı n , yıllık faizin uygulanacağı yıl sayısı t olmak üzere , A ₺ , t yıl sonra bankaya yatırılırsa faiziyle birlikte

$$A \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t \text{ ₺ olarak elde ediliyor.}$$

Buna göre yıllık %20 faiz oranıyla bankaya yatırılan 360 ₺ 2 yılda ne kadar faiz getirir?

Örnek...2 :

Okyanus Coğrafyası alanında yapılan araştırmalar, bir plajdaki eğim m, kum taneciklerinin ortalama çapı d (mm cinsinden) olmak üzere plaj eğimi ve kum tanecikleri arasında $m = 0,118 \cdot \log(d) + 0,159$ ilişkisi olduğunu söylemektedir. Buna göre kum taneciklerinin çapının ortalama 0,1 mm olduğu bir plajın eğimi kaçtır?

Örnek...3 :

Bir bakteri türünde nüfus her saat 2 katına çıkmaktadır. Buna göre kaç saat sonra nüfus başlangıcın 100 katına çıkar

Örnek...4 :

a mikron türünden deprem dalgasının genişliği, T saniye türünden deprem dalgasının gerçekleşme süresi, B depremin kaydedildiği rasathaneye bağlı bir sabit değer olmak üzere bir depremin şiddeti

$$R = \log\left(\frac{a}{t}\right) + B \text{ richter olarak}$$

hesaplanmaktadır.

B=5 için a=280 mikron ve T=3,6 saniye ile kaydedilen depremin şiddeti kaçtır?

Örnek...5 :

Ses şiddeti (I) bir ses kaynağının sesin yayılma doğrultusuna dik 1 m² yüzeyde bir saniyede yaydığı enerjidir.

Ses gücü ,L=10.log(I.10¹²) olarak tanımlanır. (birimi desibeldir -dB-)

Bir düdüğün ses şiddeti 10 watt/m² ise düdüğün ses gücü nedir?

Örnek...6 :

C: kandaki tüm kolesterol miktarı

H: kandaki lipoprotein miktarı olmak üzere bir erkeğin kalp krizine yakalanma olasılığı P ,

$$P = 1,36 \cdot \ln\left(\frac{C}{H}\right) - 1,19$$

bağıntısı ile hesaplanmaktadır.

C=240 ve H=80 olan bir erkek için kalp krizi geçirmeme olasılığı kaçtır? (Kadınlarda bu

olasılık modeli $P = 2,07 \cdot \ln\left(\frac{C}{H}\right) - 2,04$

biçimindedir)

Örnek...7 :

Herhangi bir anda tüm yaşayan canlılarda ve havada C-14'ün C-12'e oranı yaklaşık olarak sabittir ve 1/10¹² (trilyonda bir) değerindedir. Bir canlı öldükten sonra vücudundaki C-12 miktarı sabit kalırken, C-14 beta ışınımı nedeniyle (yarılanma ömrü 5736 yıldır) giderek azalır. Bu ışınım miktarı kullanılarak canlı kalıntının yaşı öğrenilmektedir. Karbon-14 yaş tayini için aşağıdaki formül kullanılmaktadır :

$$T = \frac{\ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)}{-0,693} \cdot t_{\frac{1}{2}}$$

T tahmin edilen yaş, ln doğal logaritma , N_f / N₀ canlı kalıntısındaki karbon-14 miktarının canlı dokulardaki C-14 karbon miktarına oranı , t_{1/2} ise Karbon-14'ün yarı ömrüdür (5736 yıl).

Canlı bir örneğin %10'u kadar bir Karbon-14 içeren bir canlı kalıntının yaşı yaklaşık kaçtır?

Konu ile ilgili araştırınız

Gelenbevi İsmail Efendi , John Napier

Facebook internet sitesini kullanan kişi

[sayısını modellemek için inceleyebileceğiniz](#)

[geogebra çalışma sayfası bağlantısı.](#)

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DİZİLER

Tanım kümesi pozitif Tam Sayılar kümesi, değer kümesi Reel Sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir.

Dizi genel olarak $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, tanım kümesi; $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ve görüntü kümesi; $f(\mathbb{Z}^+) = \{f(1), f(2), f(3), f(n), \dots\}$ dir.

Dizilerde değişken için x yerine n seçilir ve genellikle, $f(n)$ yerine (a_n) , (b_n) , (x_n) biçiminde temsil edilirler.

Örneğin $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ dizisini $(a_n) = (n^2)$ biçiminde veya $(a_n) = (1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$ olarak yazılabilir.

Bu dizide bazı terimler $a_1 = 1$, $a_3 = 9$, $a_{10} = 100$

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ şeklinde yazıldığında.

a_1 dizinin birinci terimi

a_2 dizinin ikinci terimi

a_3 dizinin üçüncü terimi

a_n dizinin n inci terimi veya genel terimidir.

(kısaca $f(n) = a_n$ düşünülür)

Örnek...1 :

Genel terimi; $a_n = \frac{1}{n+1}$ olan dizi

$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$ şeklinde yazılabilir.

Örnek...2 :

$(a_n) = \left(\frac{1}{n-781}\right)$ ifadesi bir dizi belirtmez çünkü

bu ifadeyi tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi değildir.

Örnek...3 :

Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir dizinin genel terimi olabilir?

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 200}$$

$$b_n = \tan(n^\circ)$$

$$c_n = \frac{1}{n^3 - n}$$

$$d_n = \log_2(100 - n)$$

$$e_n = \frac{\sqrt{600 - n}}{n^2 + 1}$$

$$f_n = \sqrt[3]{n - 20}$$

Örnek...4 :

Genel terimi $w_n = n^2 + 1$ olan dizinin üçüncü terimi kaçtır?

Örnek...5 :

Genel terimi $r_n = n^3 - n + 2$ olan dizi için ilk üç terim toplamı nedir?

Örnek...6 :

Genel terimi $u_n = n!$ olan dizide 10.terim 8. terimin kaç katıdır?

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Örnek...7 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} n+2 & n < 10 \\ n-2 & n \geq 10 \end{cases}$ olan dizi için $a_9 + a_8 - a_{10}$ kaçtır?

Örnek...8 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n-3 & n \text{ tekse} \\ n^2+1 & n \text{ çiftse} \end{cases}$ olan dizi için $a_9 + a_8 - a_{10}$ kaçtır?

Örnek...9 :

Genel terimi $a_n = 2+4+6+\dots+2n$ olan dizi için
a) $a_5 = ?$

b) $a_{10} - a_9 = ?$

Örnek...10 :

Genel terimi $a_n = 1.2.3 \dots n$ olan dizi için a_{25} teriminin sondan kaç basamağı 0 dir?

Örnek...11 :

Genel terimi $x_n = \frac{2n-3}{n+1}$ dizisinin kaçınıcı terimi $\frac{7}{4}$ olur?

Örnek...12 :

$(a_n) = \left(\frac{19n-n^2}{n^2+13n} \right)$ dizisinin kaç terimi pozitiftir?

Örnek...13 :

$(c_n) = \left(\frac{n^2+5n+10}{n+1} \right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Örnek...14 :

$(p_n) = \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n + 1} \right)$ dizisinin kaç terimi $\left(\frac{1}{2} \right)$ den küçüktür?

Örnek...15 :

$(b_n) = (n^2 - 4n + 13)$ dizisinin en küçük terimi nedir?

Örnek...16 :

$(b_n) = (9 - n^2 - 7n)$ dizisinin en büyük terimi nedir?

Örnek...17 :

$(b_n) = (13 - n^2)$ dizisinin en çok kaç terimi $(-20, 20)$ arasındadır?

Örnek...18 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n & n \text{ tek} \\ 2n-1 & n \text{ çift} \end{cases}$ olan dizi için ilk 4 terim çarpımı kaçtır?

Örnek...19 :

Genel terimi $d_n = 2^n \cdot (n+1)!$ olan dizide ardışık iki terimden biri diğerinin 12 katıdır. Bu terimlerden küçük olanı kaçtır?

İNDİRGE MELİ DİZİ

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanan dizilere indirgemeli dizi denir. Bu elemanlar arasındaki bağıntıya da indirgeme bağıntısı denir.

Örnek...20 :

Uygun şartlarda tanımlı (a_n) dizisinin elemanları arasında $a_{2n+1} - a_{2n-1} = n$ bağıntısı var ve $a_1 = 9$ ise a_7 kaçtır?

Örnek...21 :

Uygun şartlarda tanımlı (a_n) dizisinin elemanları arasında $a_{n+1} = \frac{4 \cdot a_n + 5}{4}$ bağıntısı var ve $a_1 = \frac{1}{4}$ ise a_{31} kaçtır?

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DİZİLERİN EŞİTLİĞİ

İki dizinin eşit olması için aynı sıradaki terimleri birbirine eşit olmalıdır. (a_n) ve (b_n) iki dizi olmak üzere her pozitif n tamsayısı için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerine eşit diziler denir ve bu eşitlik $(a_n) = (b_n)$ olarak yazılır.

Örnek...22 :

$(p_n) = \left(\frac{3n+12}{n+4}\right)$ dizisi ve $(k_n) = (3 \cdot \cos 2n\pi)$ dizisi eşit dizilerdir çünkü bu dizilerin genel terimleri eşit ve 3 tür.

DİZİLERDE İŞLEMLER

1. Toplama ve Çıkarma

İki diziyi toplamak veya çıkarmak için bu dizilerin genel terimlerinde toplama ve çıkarma yapılır.

$$(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$$

2. Çarpma - Bolme

İki diziyi çarpmak için bu dizilerin genel terimleri çarpılır.

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

İki diziyi bölmek için de bu iki dizinin genel terimleri bölünür.

$$(a_n) : (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right), b_n \neq 0$$

Bir diziyi sabitle çarpmak için de bu dizinin genel terimini sabitle çarpmak yeterlidir.

$$c(a_n) = (c \cdot a_n)$$

Örnek...23 :

$(a_n) = (n+2)$, $(b_n) = \left(3 - \frac{n}{2}\right)$ dizileri için istenen dizileri hesaplayınız.

$$(a_n) + (b_n)$$

$$(a_n) \cdot (b_n)$$

$$(b_n) : (a_n)$$

$$3(a_n) + 2(b_n)$$

SONLU DİZİ

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ kümesi bir p elemanlı sonlu küme olmak üzere tanım kümesi $A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ olan her diziye bir p terimli sonlu dizi denir.

Örnek...24 :

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ $f: A_p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = n^2$ genel terimiyle verilen dizi, 100 terimli sonlu bir dizedir.

Örnek...25 :

$(b_n) = (13 - n^2)$ sonlu dizisinin tüm terimleri -100 den büyükse en küçük terimi kaçtır?

Örnek...26 :

$(a_n) = (\sqrt{16-n})$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

Örnek...27 :

$(a_n) = (\tan(n^\circ))$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır

SABİT DİZİ

Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere sabit diziler denir.

$$(a_n) = (-2, -2, -2, -2, \dots, -2, \dots)$$

dizisinin her terimi -2 olduğundan sabit dizedir.

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Uyarı

$(a_n)=(P(n))$ yani polinom tipinde bir dizi sabitse dizide n içeren terimler varsa bu terimlerin katsayıları 0 olmalıdır.

Örnek...28 :

$(s_n)=((3-k)n^2+(2m+1)n-m.k+5)$ dizisi sabit dizi ise s_{189} kaçtır?

Uyarı

$(a_n)=\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ yani rasyonel ifade tipinde bir dizi sabitse dizide pay ve paydada n içeren terimlerin eşit dereceli olanlarının katsayıları orantılı olmalıdır.

Örnek...29 :

$(p_n)=\left(\frac{3n+15}{n+5}\right)$ dizisi sabit dizidir

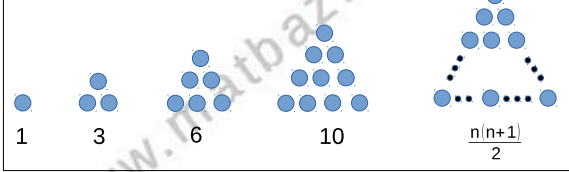
Örnek...30 :

$(x_n)=\left(\frac{an+3}{n+7}\right)$ dizisi sabit dizi ise a kaçtır?

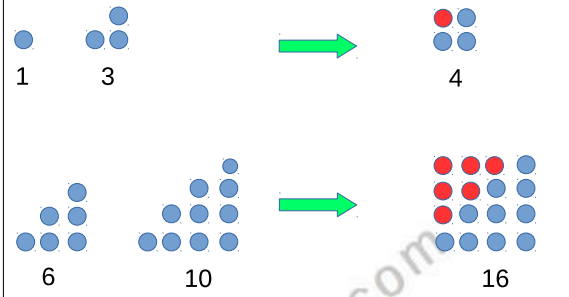
Örnek...31 :

$(x_n)=\left(\frac{(a-2)n^2-2n+4}{bn+7}\right)$ dizisi sabit dizi ise $a+b$ kaçtır?

Üçgensel sayılar: 1 den n ye kadar ardışık sayıların toplamını veren sayılara üçgensel sayılar denir.
1,3,6,10,, sayıları üçgensel sayılardır



Karesel sayılar: Ardışık 2 üçgensel sayının toplamı bir kare sayıdır.
 $1+3=4=2^2$
 $3+6=9=3^2$



Fibonacci dizisi, her sayının kendinden öncekiyle toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir.

$$F_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ F_{n-1}+F_{n-2} & n>1 \end{cases}$$

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Bu şekilde devam eden bu dizide sayılar birbirleriyle oranlandığında altın oran ortaya çıkar, yani bir sayı kendisinden önceki sayıya bölüldüğünde altın orana $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ gittikçe yaklaşan bir dizi elde edilir.

Örnek...32 :

5 basamaklı bir merdiveni her seferinde

a) 1 ya da 2 adım atarak çıkan bir kişi en çok kaç farklı biçimde çıkabilir?

a) 1 ya da 2 ya da 3 adım atarak çıkan bir kişi en çok kaç farklı biçimde çıkabilir

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DEĞERLENDİRME

1) $a_n - a_{n+1} = \frac{3}{2}$ ve $a_6 = -12$ ise a_{24} kaçtır?

2) $(c_n) = \left(\frac{n^3}{n+5}\right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

3) $(a_n) = \left(\frac{n^3 - 9n^2 - 18n}{2n - 7}\right)$ dizisinin kaç terimi negatiftir?

4) $(b_n) = (\sec(n^\circ))$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

5) k bir tamsayı olmak üzere, genel terimi $a_n = \begin{cases} 3n & n=3k \\ 3n+1 & n=3k+1 \\ 2+3n & n=3k+2 \end{cases}$ olan dizisinin ilk üç terimi toplamı kaçtır?

6) Genel terimi $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 2}\right)$ olan dizisinin ilk 10 terimi toplamı kaçtır?

7) $(a_n) = (k+2)n^3 + (2m+1)n^2 - (k.m-p)n + 5$ dizisi sabit dizi ise a_3 kaçtır?

8) $(k_n) = \left(\frac{3n-2x}{9-2n}\right)$ dizisi sabit dizi ise x kaçtır?

9) $(a_n) = (3n-2)$, $(b_n) = \left(1 + \frac{n}{2}\right)$ dizileri için $c_n = (a_n - 4.b_n)$ dizisinin ikinci terimi kaçtır?

10) $(u_n) = (24 - n^2 - 4n)$ dizisinin en büyük terimi nedir?

11) $(u_n) = (3n^2 - 19n + 7)$ dizisinin en küçük terimi nedir?

12) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin en çok kaç alt kümesinde ardışık 2 terim bulunmaz ?

DİZİLER-2

ARİTMETİK DİZİ

TOPLAM SEMBOLÜ

$1+r+r^2+\dots+r^N=\sum_{k=0}^N r^k$ biçiminde kısaca toplam sembolü kullanılarak da (\sum) gösterilebilir.

$\sum_{k=a}^b x_k$ ifadesinde k sayısına indis, a sayısına alt sınır, b sayısına üst sınır denir. x_k sayıları, k'nin a tamsayısından başlayıp birer artarak son olarak b değerini almasıyla son bulan toplamı yapılacak olan terimlerdir.

Örnek...1 :

$\sum_{k=-2}^3 (2k+1)$ toplamının değeri kaçtır?

Örnek...2 :

$\sum_{k=1}^{20} k \cdot (-1)^k$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...3 :

$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2+k}$ işleminin sonucu kaçtır?

ARİTMETİK DİZİ

Bir (a_n) dizisinin rastgele ardışık terimleri arasındaki fark sabit sayı ise, bu diziyeye aritmetik dizi denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^+ a_{n+1} - a_n = r$ ise, (a_n) ortak farkı r olan aritmetik dizidir.

Örnek...4 :

$(a_n) = (2, 8, 14, 20, \dots, 6n-4, \dots)$ dizisi ortak farkı 6 olan bir aritmetik dizidir.

Örnek...5 :

Aşağıda genel terimi verilen diziler aritmetik midir?

a) $x_n = (2n+1)/3$ b) $a_n = 1/n$ c) $c_n = n!$

ARİTMETİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

a_n ortak farkı r olan bir aritmetik dizi olsun

Özellik1

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Örnek...6 :

İlk terimi 8 ortak farkı 5 olan bir aritmetik dizinin 50. terimi kaçtır?

DİZİLER-2

ARİTMETİK DİZİ

Örnek...7 :

İlk terimi 10 olan bir aritmetik dizinin 27. terimi 62 ise ortak farkı kaçtır?

Örnek...8 :

Ortak farkı 26 olan bir aritmetik dizinin 14. terimi 350 ise ilk terimi kaçtır?

Özellik2

$a_n = a_1 + (n-1)r$ ise $\frac{a_n - a_1}{n-1} = r$ veya daha genel olarak $\frac{a_x - a_y}{x-y} = r$

Örnek...9 :

Birinci terimi 5, ortak farkı 4 olan aritmetik dizinin
a) genel terimini b) 5. terimini bulalım.

Örnek...10 :

Birinci terimi 2 ve ikinci terimi $\frac{7}{2}$ olan aritmetik dizinin
a) ortak farkını b) 10. terimini c) genel terimini bulunuz.

Örnek...11 :

İlk terimi -2, ortak farkı 4 olan bir aritmetik dizinin kaçınıcı terimi 14 tür?

Örnek...12 :

Dördüncü terimi 14, onuncu terimi 38 olan bir aritmetik dizinin ikinci terimi nedir?

Örnek...13 :

Bir aritmetik dizinin a. terimi b, b. terimi a ise 4. terimi nedir?

Örnek...14 :

5 ile 80 arasına bu terimler hariç 19 tane daha sayı yerleştirilerek artan bir sonlu aritmetik dizi elde ediliyor. Bu dizinin ortak farkı nedir?

Örnek...15 :

İlk terimi 9, ortak farkı 2 ve son terimi 27 olan sonlu bir aritmetik dizinin terim sayısı kaçtır?

DİZİLER-2

ARİTMETİK DİZİ

Özellik3

Bir aritmetik dizide $a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2}$

yani aritmetik bir dizide bir terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasıdır.

Örnek...16 :

Onuncu terimi 15 olan bir aritmetik dizinin 9. ve 11. terimleri toplamı kaçtır?

Örnek...17 :

Üçüncü terimi 20 olan bir aritmetik dizinin ilk 5 terimi toplamı kaçtır?

Özellik4

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin toplamı aynı sabit sayıya eşittir. (a_n) sonlu aritmetik dizi olsun. $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n-k+1} = \dots$

Örnek...18 :

(a_n) bir aritmetik dizi olsun. $a_{10} = 15$ ve $a_5 = 7$ ise $a_7 + a_8$ kaçtır?

Örnek...19 :

Bir aritmetik dizinin 10. terimi 8 olduğuna göre 1. ve 19. terimleri toplamı nedir?

Özellik5

Bir aritmetik dizinin ilk n terim toplamı; S_n ile gösterilir ise

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ dir.}$$

Örnek...20 :

Genel terimi $a_n = 5n - 2$ olan bir aritmetik dizinin ilk 20 terim toplamı nedir?

Örnek...21 :

Bir aritmetik dizinin ilk 4 teriminin toplamı 10 ve ilk 8 teriminin toplamı 68 olduğuna göre bu dizinin 10 terimi nedir?

Örnek...22 :

İlk n teriminin toplamı $n^2 + 3n$ olan bir aritmetik dizinin
a) 4. terimi? b) ortak farkı kaçtır

Örnek...23 :

Şekilde bir kısmı görülen konser alanında en ön sırada 60 oturma yeri vardır. Her sırada bir önceki sıradan 4 kişilik fazla oturma yeri bulunmaktadır. Konser alanında toplam 1960 kişilik olduğuna göre, en arka sırada kaç kişiliktir ?



DİZİLER-2

ARİTMETİK DİZİ

DEĞERLENDİRME

1) $2+5+8+\dots+302=?$

2) (a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere,
 $a_2=5$ ve $a_4 + a_6 + a_8 =63$
olduğuna göre, bu dizinin ilk terimi kaçtır?

3) $(a_n)=\left(\frac{1}{2}, 1, x, y, \dots\right)$ aritmetik dizisinin ilk 5 terimi çarpımı nedir?

4) İlk n terimi toplamı $T_n= 5n - 2$ olan bir aritmetik dizinin 9. terimi kaçtır?

5) Bir aritmetik dizinin terimleri için
 $a_{13} = 26$, $a_{19} = 34$ ise göre, bu dizinin ilk 31 terimi toplamı kaçtır?

6) (a_n) aritmetik dizisinde,
 $a_4 - a_2 = 10$ ve $a_{20} = 103$
olduğuna göre, a_{11} kaçtır?

7) İlk 40 terim toplamı 1200 olan dizinin ilk terimi ortak farkından 11 küçükse dizinin 41.terimini bulunuz.

8) ilk n terim toplamı S_n olan bir aritmetik dizide,
 $S_5 - S_4 = 20$, $S_7 = 10$ ise bu dizinin ortak farkı kaçtır?

DİZİLER-2

ARİTMETİK DİZİ

- 9) Bir aritmetik dizinin terimleri için
 $a_4 + a_5 = 62$
 $a_8 + a_{10} = 134$
ise göre, bu dizinin ilk 10 terimi toplamı kaçtır?

- 10) Üç terimli bir aritmetik dizinin terimleri toplamı 3, terimlerinin karelerinin toplamı 21 olduğuna göre dizinin en küçük terimi en az kaç olabilir?

- 11) (a_n) bir aritmetik dizi olsun. $a_8 = 12$ ve $a_{15} = 54$ ise bu dizinin ilk n terimi toplamı kaçtır?

- 12) $\sum_{k=0}^{90} \cos^2 k$ işleminin sonucu kaçtır?

- 13) $\sum_{k=0}^{20} \frac{k}{(k+1)!}$ işleminin sonucu kaçtır?

- 14) $\sum_{k=0}^{63} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ işleminin sonucu kaçtır?

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

GEOMETRİK DİZİ

Bir (a_n) dizisinin ardışık terimleri arasındaki oranı aynı sabit sayı ise, bu diziye geometrik dizi denir.

$\forall n \in \mathbb{N}^+, \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise, (a_n) ortak çarpanı r olan geometrik dizidir.

Örnek...1 :

$(a_n) = (2 \cdot 3^n)$ dizisinin geometrik dizi olup olmadığını inceleyelim.

GEOMETRİK DİZİNİN ÖZELLİKLERİ

(a_n) ortak farkı r olan bir aritmetik dizi olsun

özellik 1

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

⋮

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Örnek...2 :

$(a_n) = (2, 10, 50, \dots)$ geometrik dizisinde 5. terim kaçtır ?

Örnek...3 :

İlk terimi 3, ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin 6. terimi kaçtır?

Örnek...4 :

Pozitif terimli ve ilk terimi $\frac{1}{250}$ olan bir geometrik dizinin 7. terimi $\frac{125}{2}$ ise ortak çarpanı kaçtır?

Örnek...5 :

Ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik dizinin 8. terimi 512 ise ilk terimi kaçtır?

Özellik 2

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ ise } \frac{a_n}{a_1} = r^{n-1} \text{ veya daha genel}$$

$$\text{olarak } \frac{a_x}{a_y} = r^{x-y}$$

Örnek...6 :

Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi $\frac{1}{2}$ ve ortak çarpanı $\sqrt[5]{2}$ olan dizinin 16. terimini bulalım.

Örnek...7 :

Bir (a_n) pozitif terimli geometrik dizide, $a_2 = 4$ ve $a_7 = 128$ olduğuna göre, a)5. terimi b) genel terimini bulunuz.

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

Örnek...8 :

2/3 ile 1/48 arasına bu sayılar hariç 4 sayı yerleştirilerek 6 terimli azalan bir geometrik dizi elde ediliyor. Bu dizinin 2. terimi kaçtır?

Özellik 3

Bir geometrik dizide $a_p^2 = a_{p-k} \cdot a_{p+k}$ yani geometrik bir dizide bir terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasıdır.

Örnek...9 :

Onuncu terimi 8 olan bir geometrik dizinin 7. ve 13. terimleri çarpımı kaçtır?

Örnek...10 :

Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi $x-1, x, x+3$ ise göre x kaçtır?

Özellik 4

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki herhangi iki terimin çarpımı aynı sabit sayıya eşittir.

(a_n) sonlu geometrik dizi olsun.

$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_k \cdot a_{n-k+1} = \dots$

Örnek...11 :

Üçüncü terimi 20 olan bir geometrik dizinin ilk 5 terimi çarpımı kaçtır?

Örnek...12 :

Bir geometrik dizide, $a_{37} \cdot a_{43} = A$ olduğuna göre, a_{40} , A türünden nedir? ($A \geq 0$)

Örnek...13 :

Bir geometrik dizinin ardışık üç teriminin toplamı 26, çarpımı 216 dır. Bu üç terimden en küçük olanı nedir?

Örnek...14 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_7 = \log_5 125$, $a_{17} = 1 + \log_5 2$ ise a_{12} kaç olabilir?

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

Örnek...15 :

Bir geometrik dizinin ardışık altı terimi sırasıyla $x, y, 60, 1/3, z, t$ olduğuna göre, $x.y.z.t$ çarpımının değeri kaçtır?

Örnek...16 :

$(a, 2a-2, b-4)$ sonlu dizisi hem aritmetik hem de geometrik dizi olduğuna göre, $a.b$ nin değeri kaç olur?

Özellik 5

(x_n) geometrik dizi ise ,bu geometrik dizinin ilk n terim toplamı $S_n = x_1 \cdot \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$
Burada $r \geq 1$ için toplam sınırsız olarak büyür. $0 < r < 1$ ise toplam bir gerçek sayıya yaklaşır.

Örnek...17 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 4$ ve ortak çarpan 2 ise ilk on terim toplamını bulunuz.

Örnek...18 :

Bir pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde, $a_4 = 3$, $a_6 = 147$ ise ilk 4 terim toplamını bulunuz.

Örnek...19 :

İlk n terim toplamı $S_n = 1 - 2^{-n}$ olan bir geometrik dizinin beşinci terimi kaç olur?

Özellik 6

(a_n) geometrik dizi ise ,bu geometrik ilk n terim çarpımı $\prod_{n=1}^n a_n = \sqrt[n]{a_n \cdot a_1^n}$

Örnek...20 :

Bir (a_n) geometrik dizisinde, $a_1 = 2$ ve ortak çarpan 8 ise ilk altı terim çarpımını bulunuz.

Örnek...21 :

Email yoluyla yayılan bir bilgisayar virüsü belli bir anda bir miktar kullanıcıya yollanıyor. Virüs bir kişiye bulaştıktan bir gün sonra, bulaştığı kişinin listesinde kayıtlı 2 kişiye kendini mail yoluyla bulaştırmaktadır. virüsün bulaştığı kişi sayısı 10.günde 10230 kişi olduğuna göre, virüs başlangıçta kaç kişiye bulaştırılmıştır? (farklı kişilerden aynı kişilere mail gitmediği ve kişilerin listelerinde 2 den fazla kişi olduğu varsayılacaktır)

DİZİLER-3

GEOMETRİK DİZİ-TOPLAM SEMBOLÜ

DEĞERLENDİRME

1) $(x_n) = \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$ ise a_3 kaçtır?

2) Bir geometrik dizinin terimleri için $a_8 + a_{13} = 162$, $a_4 + a_9 = 2$ ise bu dizinin ortak çarpan kaçtır?

3) Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\sqrt[8]{2}$ olan dizinin 65. terimi kaçtır?

4) Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk terimi $1/256$ ve ortak çarpanı 2 ise bu dizinin ilk 20 terimi çarpımı kaçtır?

5) $(x, y, x^2 - x)$ sonlu dizisi hem aritmetik hem geometrik diziye $x+y$ en çok kaçtır?

6) Pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde ilk 7 terim çarpımı $e^{21 \ln 6}$ olduğuna göre, dizinin 4. terimi kaçtır?

7) Bir geometrik dizinin ilk 8 terim toplamının ilk 4 terim toplamına oranı 626 ise , bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

TRİGONOMETRİ – 1

YAY TOPLAM VE FARKI

YAY TOPLAM VE FARKININ TRİGONOMETRİK ORANLARI

$$1) \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$2) \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$3) \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$4) \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Örnek...1 :

İfadelerin değerini hesaplayınız?

a) $\cos(15^\circ)$

b) $\sin(15^\circ)$

Örnek...2 :

Bir ABC üçgeninde $\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$ işleminin C türünden eşiti nedir?

Örnek...3 :

$\frac{\sin 27 \cdot \cos 33 + \sin 33 \cdot \cos 27}{\sin 16 \cdot \sin 14 - \cos 14 \cdot \cos 16}$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...4 :

$\frac{\sin 22 \cdot \cos 8 + \cos 82 \cdot \cos 22}{\cos 34 \cos 11 - \cos 56 \cos 79}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$5) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$6) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$7) \cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)}$$

Örnek...5 :

İfadelerin değerini hesaplayınız?

a) $\tan(15^\circ)$

b) $\tan(75^\circ)$

c) $\cot\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Örnek...6 :

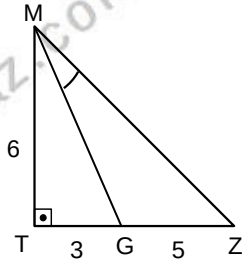
$\tan x^0 = u$ olmak üzere $\cot(135^0 - x^0)$ u türünden nedir?

TRİGONOMETRİ - 1

YAY TOPLAM VE FARKI

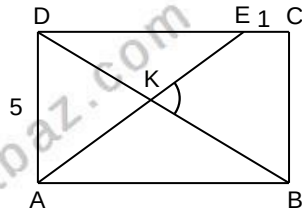
Örnek...7 :

MTZ bir üçgen,
|TG|=3br, |GZ|=5br
|MT|=6br olduğuna göre
 $\tan(\widehat{GMZ})$ kaçtır?



Örnek...8 :

ABCD dikdörtgen
|AB|=|AE|
|AD|=5 br
|CE|=1 br
olduğuna göre,
 $\tan(\widehat{BKE})$ kaçtır?



Örnek...9 :

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \cos 20 - \sin 20}{\cos 17 \cdot \cos 33 + \cos 107 \cdot \sin 33}$$

YARIM AÇI BAĞINTILARI

$$1) \sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$2) \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 \\ = 1 - 2 \sin^2 x \\ = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$3) \tan(2x) = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$4) \cot(2x) = \frac{1}{\tan 2x}$$

Örnek...1 :

$$\sin x = \frac{3}{5} \text{ ise } \tan 2x = ?$$

Örnek...2 :

$$\cos x - \sin x = \frac{2}{3} \text{ ise } \sin 2x \text{ kaç olabilir?}$$

Örnek...3 :

$$\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = ?$$

Örnek...4 :

$$\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ = ?$$

TRİGONOMETRİ – 1

YAY TOPLAM VE FARKI

Örnek...5 :

$\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{2}$ ise $\tan 2x$ kaç olabilir?

Örnek...6 :

$\frac{\sin 99^\circ}{\sin 27^\circ} + \frac{\cos 99^\circ}{\cos 27^\circ}$ işleminin sonucu kaçtır?

Örnek...7 :

$\sin 18^\circ = p$ ise $\cos^4 18^\circ - \sin^4 18^\circ$ ifadesinin p cinsinden eşitini bulunuz?

Örnek...8 :

$\tan 70^\circ = y$ ise $\cos 40^\circ$ ifadesinin x ve y cinsinden eşitini bulunuz?

Örnek...9 :

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ise $\cos x$ ifadesinin t cinsinden eşitini bulunuz?

Örnek...10 :

$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$ çarpımının eşitini bulunuz?

Örnek...11 :

$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \cdot \tan^2 x$ işleminin sonucu kaçtır?

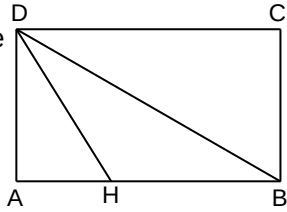
TRİGONOMETRİ - 1

YAY TOPLAM VE FARKI

DEĞERLENDİRME

- 1) Bir ABC üçgeninde $\cot A = \frac{1}{3}$ ve $\cot B = \frac{1}{4}$ olmak üzere, $\cot(\hat{C})$ kaçtır?

- 2) ABCD dikdörtgeninde
 $3 \cdot |AD| = 4 \cdot |AH| = 2 \cdot |HB|$
ise $\cot(\hat{HDB})$ kaçtır?



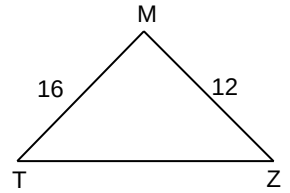
- 3) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arctan\frac{5}{12}\right) = ?$

- 4) $\sin 18^\circ = x$, ise $\sin 126^\circ$ ifadesinin x cinsinden eşitini bulunuz?

- 5) $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
 $\operatorname{cosec} 18^\circ - \sec 36^\circ = ?$

- 6) MTZ bir üçgen
 $m(\widehat{TZM}) = 2 \cdot m(\widehat{ZTM})$
ise $\tan(\widehat{MTZ})$ kaçtır?

(Sinüs teoremi kullanınız)



- 7) $\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{3}{2}$ ise $\sin 2x$ kaç olabilir?

- 8) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
 $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ olduğuna göre,
 $\arctan\left(\frac{\sin 10 + \sin 50}{\cos 10 + \cos 50}\right) = ?$

TRİGONOMETRİ – 2

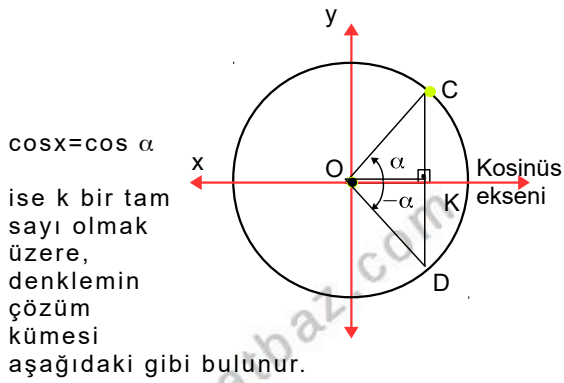
TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

İçinde bilinmeyenin trigonometrik fonksiyonları bulunan, bilinmeyen bazı değerleri için doğru olan eşitliklere, trigonometrik denklem denir. Denklemi sağlayan değerlere, denklemin kökleri; köklerin oluşturduğu kümeye de çözüm kümesi denir. Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de denklemi çözmeye denir.

A) $\cos(x)=\cos \alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



$$\mathcal{C} = \{x: x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = -\alpha + k.2\pi \}$$

GENEL OLARAK

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k.2\pi \\ f(x) = -g(x) + k.2\pi \end{cases}$$

Örnek...1 :

$\cos(4x-60) = \cos(2x)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

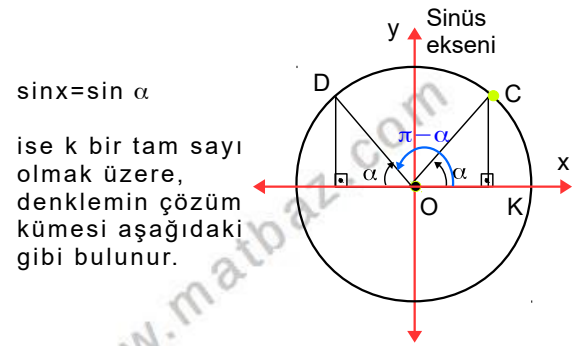
Örnek...2 :

$$\cos(2x+40) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz

B) $\sin(x)=\sin \alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi-\alpha$ radyanlık yayın bitim noktası D olsun. Şekli inceleyiniz.



$$\mathcal{C} = \{x: x = \alpha + k.2\pi \text{ veya } x = \pi - \alpha + k.2\pi \}$$

GENEL OLARAK

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x)) \rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k.2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k.2\pi \end{cases}$$

Örnek...3 :

$\sin(5x-120) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

TRİGONOMETRİ – 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

Örnek...4 :

$\sin(6x-40) = \cos(2x+20)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...5 :

$\sin(2x+40) = -\sin x$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...6 :

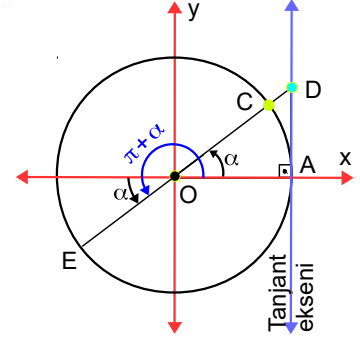
$\sin(x) = -1$
denkleminin $(0, 360)$ aralığında kaç farklı çözümü vardır?

C) $\tan(x) = \tan \alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Birim çember üzerinde standart pozisyonda α radyanlık yayın bitim noktası C, $\pi + \alpha$ radyanlık yayın bitim noktası E olsun. $x=1$ doğrusuna tanjant eksenini dendiğini öğrenmiştik. Orijinden ve C (ve E) noktasından geçen doğrunun tanjant eksenini kestiği nokta D olsun. İnceleyiniz.

$$\tan x = \tan \alpha$$

ise k bir tam sayı olmak üzere



$$\mathcal{C} = \{x : x = \alpha + k \cdot \pi \}$$

GENEL OLARAK

$$\tan(f(x)) = \tan(g(x)) \rightarrow f(x) = g(x) + k \cdot \pi$$

Örnek...7 :

$\tan(x) = \sqrt{3}$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Örnek...8 :

$\tan(5x-20^\circ) = \tan(3x+30^\circ)$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

TRİGONOMETRİ – 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

D) $\cot(x)=\cot\alpha$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$\cot x = \cot \alpha$ ise k bir tam sayı olmak üzere

$$\mathcal{C} = \{x: x = \alpha + k \cdot \pi\}$$

GENEL OLARAK

$$\cot(f(x)) = \cot(g(x)) \rightarrow f(x) = g(x) + k \cdot \pi$$

Örnek...9 :

$\cot(3x) = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

Örnek...10 :

$\cot(3x) = \tan(2x)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

Örnek...11 :

$\tan 2x + \frac{\sqrt{2} - 2\sin 2x}{\cos 2x} = 1$ denkleminin $(0, 90)$ arasındaki çözümünü kaçtır?

Örnek...12 :

$\tan x + \cot x = 4\cos 2x$ denklemini sağlayan x in pozitif en küçük değeri kaçtır?

Örnek...13 :

$2\cos x < \cot x$ eşitsizliğinin $(0, 90)$ aralığında çözüm kümesini bulunuz

TRİGONOMETRİ – 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

$a \cdot b \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \sin x + b \cos x = c$ biçimindeki denklemlere klasik denklemler denir. Bu denklemler b ye bölünüp $\frac{a}{b} \sin x + \cos x = \frac{c}{b}$ biçimine getirildikten sonra ($\cos x$ katsayısı 1 yapıldıktan sonra) $\tan(\theta) = \frac{a}{b}$ dönüşü ile beraber yay toplam fark bağıntıları kullanılarak çözülür.

Uyarı $f(x) = m \sin x + n \cos x$ fonksiyonu x in gerçek sayı değerleri için $[-\sqrt{m^2+n^2}, \sqrt{m^2+n^2}]$ aralığında değerler alır

Örnek...14 :

$\sqrt{2} \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek...15 :

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek...16 :

$3 \sin x + 4 \cos x = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$f(\sin x, \cos x) = 0$ denkleminde $\sin x$ ve $\cos x$ ifadelerinin dereceleri eşitse bu tür denklemlere homojen trigonometrik denklemler denir. Bu tür denklemlerde eşitliğin her iki yanını $\cos x$ in uygun kuvvetine bölünerek cebirsel hale getirilebilir

Örnek...17 :

$\sin^2 x - 2 \cos x \cdot \sin x - 8 \cos^2 x = 0$ olduğuna göre $\tan x$ değeri kaçta eşit olabilir?

Örnek...18 :

$\sin^2 x + (\sqrt{3} + 1) \cos x \cdot \sin x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

TRİGONOMETRİ – 2

TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

DEĞERLENDİRME

1) $\cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin x$ denkleminin $(0, 180)$ arasında kaç kökü vardır?

2) $\tan(4x - 20) \cdot \tan(2x) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

3) $\sec x = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

4) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

5) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin 2x - \cos 2x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

6) $\sin x - \tan 60 \cdot \cos x = 1$ denkleminin en küçük kökü kaçtır?

7) $\sin x + \cos x = 1$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

8) $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{4}{3}$ denkleminin $(0, 500)$ aralığında kaç kökü vardır?

9) $\cos^3 x + 2\sin^3 x = 3\cos x \sin^2 x$ denklemini sağlayan dar açı kaç derecedir?

10) $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ denkleminin çözüm kümesinin boş olmaması için a , b ve c arasında hangi bağıntı olmalıdır?

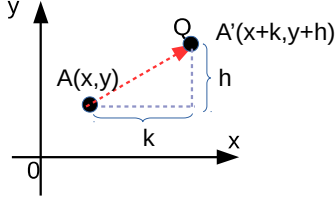
DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

ÖTELEME DÖNÜŞÜMÜ

Bir şeklin hiç değişmeden (boyutları bozulmadan) sağ, sol, yukarı ve aşağı (eksenlere paralel) yönlerde bir vektör doğrultusunda yer değiştirilmesine **öteleme** denir.

k ve h pozitif reel sayılar olmak üzere analitik düzlemde koordinatı $A(x,y)$ olan bir noktanın x eksenini boyunca k birim sağa ve y eksenini boyunca h birim yukarı ötelenmiş hali $A'(x+k,y+h)$ noktasıdır.



Örnek...1 :

$A(3,5)$ noktasını eksenler boyunca 2 br sağa ve 5 br yukarı ötelenmişini bulunuz?

Örnek...2 :

$A(1,-9)$ noktasını eksenler boyunca 2 br sola ve 8 br yukarı ötelenmişini bulunuz?

Örnek...3 :

$A(x, y)$ noktasının eksenler boyunca 4 br sağa ve 8 br aşağı ötelenmesiyle $B(1,-2)$ noktası elde ediliyor. Buna göre A noktasının koordinatları çarpımını bulunuz.

Örnek...4 :

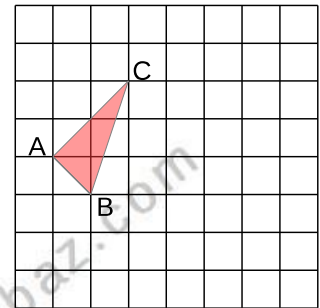
$f(x)=x^2$ parabolünü eksenler boyunca 1 birim sağa ve 1 birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen parabolü bulunuz

Örnek...5 :

$f(x)=x^2 +6x+11$ parabolünü eksenler boyunca 2 birim sola ve 3 birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen parabolü bulunuz

Örnek...6 :

Şekildeki ABC üçgeninin eksenler boyunca 4 birim sağa , 2 birim aşağı ötelenmişini bulunuz

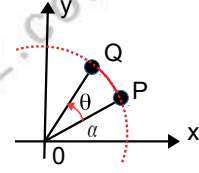


DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

Düzlemde bir $P(x,y)$ noktasının O noktası etrafında θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta ($|OP|=|OQ|$)



$Q=R_{\theta}(P) = (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta, x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta)$ olur.
(Bağıntıda $P(x,y)=P(|OP| \cos \alpha, |OP| \sin \alpha)$ ve $Q(x',y')=Q(|OQ| \cos(\alpha+\theta), |OQ| \sin(\alpha+\theta))$ olduğuna dikkat)

Burada R_{θ} ya dönme dönüşümü denir.

Düzlemin her P noktası için $R_{\theta}(P)$ dönmesi yapılabilir.

$T_{\theta}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu düzlemin noktalarını $P \rightarrow R_{\theta}(P)$ düzlemin noktalarıyla eşleyen birebir ve örten fonksiyon olduğundan düzlemin bir dönüşümü adını alır

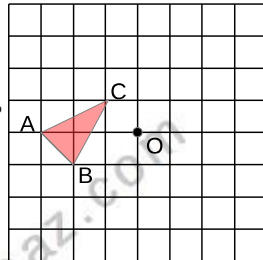
Dönme esnasında değişmeyen noktaya dönme merkezi denir

Örnek...7 :

$A(3,4)$ noktasını orjin etrafında pozitif yönde 90° döndürdüğümüzde hangi noktayı elde ederiz?

Örnek...8 :

Şekildeki üçgenin O noktası etrafında
a) pozitif yönde 90°
b) negatif yönde 180° elde edilen görüntüleri çiziniz?



Örnek...9 :

Aşağıda verilen noktaları orjin etrafında verilen açılar kadar pozitif yönde döndürülmesiyle elde edilen noktaları bulunuz.

$M(6,0)$ $\theta=30^\circ$

$L(0,\sqrt{2})$ $\theta=225^\circ$

Örnek...10 :

$A(x,y)$ noktasının orjin etrafında pozitif yönde 90° döndürüldüğünde $B(6,-4)$ noktası elde ediliyor . Buna göre x,y kaçtır?

Örnek...11 :

Köşe koordinatları $A(-2,-4)$, $B(1,2)$ ve $C(-5,2)$ olan ABC üçgeninin 2 br sağa ve 4 br yukarı eksenler doğrultusunda ötelenmesi sonucu elde edilen üçgen orjin etrafında pozitif yönde 270° döndürülüyor. Elde edilen üçgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Düzlemde öteleme dönme ve bunların bileşke dönüşümleri , uzaklık ve açıların yönlerini koruyan dönüşümlerdir.

R_{θ} ve R_{α} iki dönme fonksiyonu ise $R_{\theta} \circ R_{\alpha} = R_{\theta+\alpha}$ olur.

Örnek...12 :

$K(6,-9)$ için $[R_{230^\circ} \circ R_{-50^\circ}](K)$ noktasını bulunuz?

DÖNÜŞÜMLER

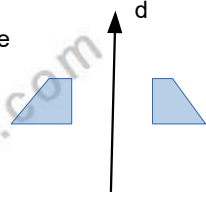
ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

Bir şekil merkezi etrafında 360° den küçük bir açı ile döndürüldüğünde kendisi ile çakışiyorsa dönme simetrisine sahiptir denir. Şekil merkezi etrafında döndürülürken kendisi ile çakışan en küçük dönme açısına en küçük dönme simetri açısı denir. (Dönme simetri sayısı 360'ın en küçük dönme simetri açısına bölünmesiyle bulunur)

Düzen Çokgen	Eşkenar üçgen	Düzen beşgen
En küçük dönme simetri açısı	120	72
Dönme simetri sayısı	3	5
Yansıma eksen sayısı	3	5

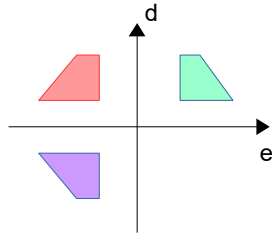
YANSIMA

Bir şeklin verilen bir noktaya veya doğruya göre simetriğinin alınmasına yansıma dönüşümü hareketi denir. Bir doğru bir şekli birbirine simetrik iki şekle ayırıyorsa bu doğruya şeklin simetri eksenidir.



Örnek...13 :

Şekilde kırmızı dörtgenin d ve e doğrularına göre yansımaları verilmiştir



Örnek...14 :

A(-5,9) noktasının x eksenine göre yansıma altındaki görüntüsünü bulunuz?

SİMETRİ

A ve B ile aynı doğrultuda , B noktasına A'nın uzaklığı kadar uzaklıkta bulunan A' noktasına , A'nın B ye göre simetriği olan nokta denir. Yani B noktası simetrik iki noktanın orta noktasıdır.

A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) ve C(x_0, y_0) noktası A ile B noktasının orta noktası ise $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$ olur.

Örnek...15 :

A(3,-5) noktasının K(1,4) noktasına göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Örnek...16 :

A(-5,6) noktasının orijine göre simetriği B, B noktasının C noktasına göre simetriği K(-3,-8) ise C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Örnek...17 :

L(-5,6) noktasının B(-1,-2) noktasına göre simetriği K ise L ve K noktaları arası uzaklık kaç birimdir?

DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

NOKTANIN DOĞRULARA GÖRE SİMETRİKLERİ

1. NOKTANIN EKSENLERE GÖRE SİMETRİKLERİ

$A(a,b)$ noktasının x eksenine göre simetriği $A'(a,-b)$ y eksenine göre simetriği $A''(-a,b)$ olur

Örnek...18 :

$A(3,8)$ noktasının x eksenine göre simetriği B , $K(-3,5)$ noktasının y eksenine göre simetriği G noktası ise $|BG|$ kaç birimdir?

Örnek...19 :

Bir K noktasının x eksenine göre simetriği $L(-6,4)$ ise K noktasının y eksenine göre simetriği olan noktanın koordinatları çarpımı kaçtır?

2. NOKTANIN $X=A$ VE $Y=B$ DOĞRULARINA GÖRE SİMETRİKLERİ

$A(x_1,y_1)$ noktasının $x=a$ doğrusuna göre simetriği $A'(2a-x_1,y_1)$ noktasıdır.

$A(x_1,y_1)$ noktasının $y=b$ doğrusuna göre simetriği $A''(x_1,2b-y_1)$ noktasıdır.

Örnek...20 :

$A(1,5)$ noktasının $x=4$ noktasına göre simetriği B , $y=2$ doğrusuna göre simetriği C noktası ise B ve C noktalarından geçen doğrunun eğimi kaçtır?

2. NOKTANIN $Y=X$ VE $Y=-X$ DOĞRULARINA GÖRE SİMETRİKLERİ

$A(x_1,y_1)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği $A'(y_1,x_1)$ noktasıdır.

$A(x_1,y_1)$ noktasının $y=-x$ doğrusuna göre simetriği $A''(-y_1,-x_1)$ noktasıdır.

Örnek...21 :

Dik koordinat düzleminde $K(4,-2)$ noktasının $y=x$ e göre simetriği olan nokta ile $L(-3,2)$ noktasının $y=-x$ e göre simetriği olan nokta arası mesafe kaç birimdir?

3. NOKTANIN DOĞRUYA GÖRE SİMETRİĞİ

$A(x_1,y_1)$ noktasının $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetriği $A'(p,q)$ noktası bulunurken

a) eğimi $\frac{b}{a}$ olan ve $A(x_1,y_1)$ noktasından

geçen doğrunun denklemini bulunur

b) bulunan ve verilen doğruların kesim noktası bulunur

c) $A(x_1,y_1)$ noktasının kesim noktasına göre simetriği $A'(p,q)$ noktasıdır.

Örnek...22 :

$A(1,2)$ noktasının $y=2x+1$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz

DÖNÜŞÜMLER

ÖTELEME -YANSIMA - DÖNME

Örnek...23 :

A(0,4) noktasının $y+x-2=0$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz

Örnek...24 :

A(6,2) noktasının $4y-3x-15=0$ doğrusuna göre simetriği B ise $|AB|$ kaç birimdir?

DOĞRUNUN NOKTAYA GÖRE SİMETRİĞİ

$ax+by+c=0$ doğrusunun A(p,r) doğrusuna göre simetriği $ax+by+d=0$ doğrusudur. Burada d sabitini bulmak için verilen doğrunun üzerinde bir nokta alınır ve bu noktayla orta noktası A olacak bir B noktası elde edilir. B noktası $ax+by+d=0$ doğrusu üzerindedir

Örnek...25 :

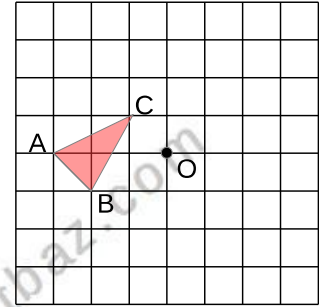
$2x+3y+6=0$ doğrusunun K(-3,2) noktasına göre simetriği olan doğruyu bulunuz

Örnek...26 :

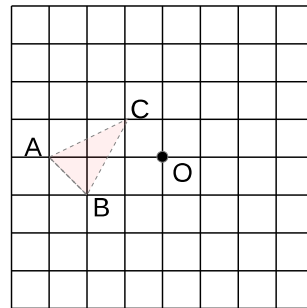
$x-6y+18=0$ doğrusunun K(1,2) noktasına göre simetriği olan doğruyu bulunuz

Örnek...27 :

Yanda verilen ABC üçgenin O noktasına göre simetriğini (yansımasını) çiziniz



Çözüm



Simetri dönme ve öteleme dönüşümleri doğada ve mimaride kullanılmaktadır. Özellikle kültürümüzün şmgelerinden biri olan halılarımızda motiflerde sıklıkla karşımıza çıkmaktadır.

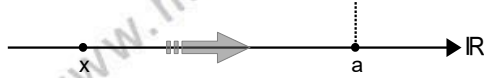
LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

BAĞIMSIZ DEĞİŞKENİN BİR SAYIYA YAKLAŞMASI VE BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

SOLDAN YAKLAŞMA

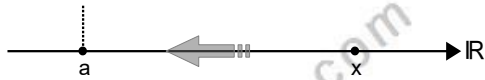
$a \in \mathbb{R}$ olsun. a sayısına, a sayısından daha küçük değerler ile yaklaşıyorsak bunu $x \rightarrow a^-$ ile belirtiriz.



Örneğin; $x \rightarrow 5^-$ yazdığımızda sırasıyla x değerlerini 4,5 , 4,9 , 4,99 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada x sayısı 5 e çok yakın fakat 5 den küçük bir sayıdır.

SAĞDAN YAKLAŞMA

a sayısına, a sayısından daha büyük değerler ile yaklaşıyorsak bunu $x \rightarrow a^+$ ile belirtiriz.



Örneğin şekilde $x \rightarrow 5^+$ yazmışsak sırasıyla x değerlerini 5,5 , 5,1 , 5,01 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada değerler x sayısına ne kadar yakın seçilirse $x \rightarrow 5^+$ o kadar iyi temsil edilmiş sayılır.

Örnek...1 :

Aşağıdaki ifadeleri sembolik olarak yazınız.

x in 3 e soldan yaklaşması	
x in -7 ye sağdan yaklaşması	
a nın b ye sağdan yaklaşması	

Örnek...2 :

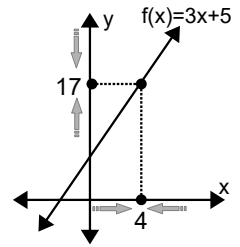
$x \rightarrow -3^+$ olduğuna göre, x^2+7 hangi tam sayıya en yakındır?

Örnek...3 :

Bir noktada sağdan ve soldan yaklaşımı bir örnekte inceleyelim. $f(x)=3x+5$ fonksiyonu için x değişkeninin 4 sayısına yaklaşırken aldığı değerler tabloda verilmiştir.

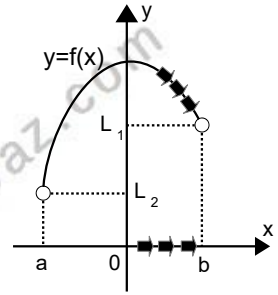
$f(x)=3x+5$						
$4^- \rightarrow$			4	$\leftarrow 4^+$		
3,8	3,9	3,99		4,01	4,1	4,2
16,4	16,7	16,97	17	17,03	17,3	17,6

Bu tabloda x değişkeni 4 e yaklaşırken, $y=f(x)$ değeri 17 sayısına yaklaşmaktadır.



SOLDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

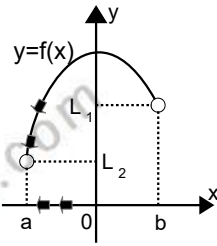
f , (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu, x değişkeni b ye bu aralıktan yaklaşırken L_1 görüntü değerine (ordinat değerine) yaklaşıyorsa f fonksiyonun b noktasında soldan limiti L_1 dir denir ve



$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_1$ ile belirtilir.

SAĞDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

f , (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonu, x değişkeni a sayısına bu aralıktan sayı değerleri olarak L_2 değerine



yaklaşıyorsa, f fonksiyonun a noktasında ki sağdan limiti L_2 dir denir.

a noktasındaki sağdan limit sembolik olarak $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ ile belirtilir.

LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

UYARI:

Soldan ve sağdan limit tanımların da limit bulunurken fonksiyonun bu noktada tanımlı olması **gerekmez**.

SONUÇ

Bir fonksiyonun bir c noktasında sağdan limiti L_1 , soldan limiti L_2 ve

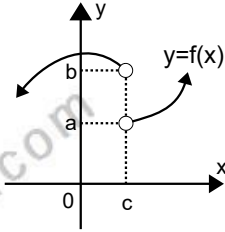
$$L_1 = L_2 = L$$

ise fonksiyonun c noktasında limiti vardır ve L dir denir. Sembolik olarak bunu **$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$** ile ifade ederiz.

Örnek...4 :

$x=c$ noktasında soldan limit b ve sağdan limit a olduğundan limit yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

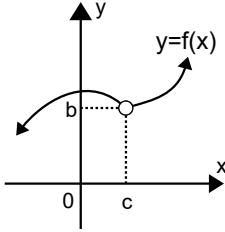


Örnek...5 :

$x=c$ noktasında sol limit b ve sağ limit de b olduğundan $x=c$ için limit b dir.

Burada $x=c$ için fonksiyonun tanımsız olması limitin var olmasına engel değildir.

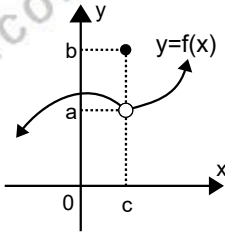
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = b$ dolayısıyla **$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$** olur.



Örnek...6 :

$x=c$ noktasında sol limit a ve sağ limit a olduğundan $x=c$ için limit a dir.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$



UYARI

$x=c$ için fonksiyon görüntüsünün ,limitle eşit olmaması bu noktada fonksiyonun limiti olmasına **engel değildir**.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$

Limit değerini ve aynı noktadaki görüntü değeri arası ilişki fonksiyonların sürekliliği başlığında incelenecektir.

Örnek...7 :

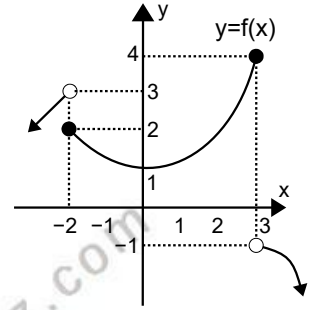
Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$



Örnek...8 :

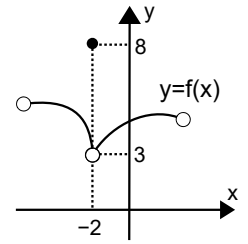
Yanda grafiği verilen fonksiyon için istenen limitleri bulunuz?

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$f(-2) = ?$$

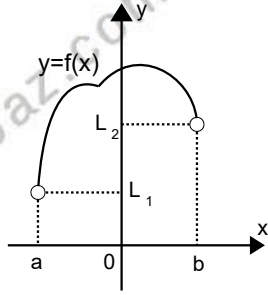


LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

UYARI

Bir $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlanmış olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki sağ limiti fonksiyonun a noktadaki limitidir. $x=a$ noktasının sol tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan sol limite bakmaya gerek yoktur. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$



Ayrıca $x=b$ noktasındaki sol limit fonksiyonun a noktadaki limitidir. $x=b$ ' nin sağ tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan a noktada sağ limite bakılmaz. $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L_2$

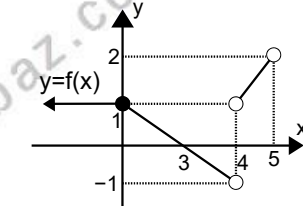
Örnek...9 :

Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) =$$



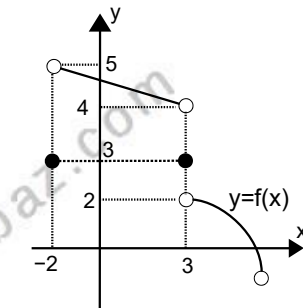
Örnek...10 :

Grafiğe göre istenen limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$



LİMİT ALMA KURALLARI :

TEOREM 1

f polinom fonksiyon veya $x=a$ noktası f fonksiyonun kritik noktası **değilse** (rasyonel fonksiyonlar için paydanın köklerinden biri, parçalı fonksiyonlar için sınır noktaları, mutlak değer veya logaritma fonksiyonunun içini 0 yapan değerler)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ olur.}$$

Örnek...11 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = ?$$

Örnek...12 :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 + x + \ln(x-3) = ?$$

TEOREM 2

L, M, c ve k birer reel sayı ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \text{ olsun.}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \mp g(x)) = L \mp M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = g(L)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow a} c^f(x) = c^L$$

$$c) \lim_{x \rightarrow a} \log f(x) = \log\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) = \log(L), \log L \in \mathbb{R}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ ve } f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\text{ise } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ olur.}$$

LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

Örnek...13 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5x^2 = ?$$

Örnek...14 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 - 7x^2 + 12x + 21) = ?$$

Örnek...15 :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (4x^2 - 5x + 13) = ?$$

Örnek...16 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (5^x + x^2 - 4x + 3) = ?$$

Örnek...17 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 3} = ?$$

Örnek...18 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)\sqrt{5}}{|x-x^2+2|} = ?$$

Örnek...19 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{x+22}}}{\sqrt{2x+17}} = ?$$

Örnek...20 :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \text{ ise}$$

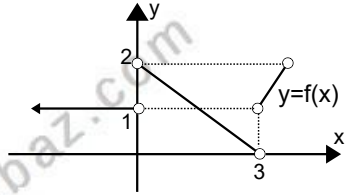
$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \cdot g^2(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = ?$$

Örnek...21 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x^2}{x^7} \right) = ?$$

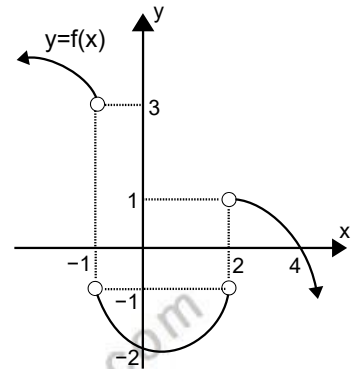
Örnek...22 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(5-x) = ?$$



Örnek...23 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ f)(x) = ?$$



LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

TRİGONOMETRİK LİMİTLER

$y=\sin x$ ve $y=\cos x$ fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlıdır dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$y=\tan x$ ve $y=\cot x$ fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlı değildir. Tanımlı olduğu her nokta için

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

Tanımlı olmadığı noktalarda gerekirse sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

Örnek...24 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = ?$$

Örnek...25 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = ?$$

Örnek...26 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \tan^3 x}{\sec^2 x} = ?$$

Örnek...27 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = ?$$

Örnek...28 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} \frac{|\operatorname{cosec} x|}{\tan x} = ?$$

Örnek...29 :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = ?$$

Limit konuduna katkıları için araştırınız
Cauchy

LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

DEĞERLENDİRME

1) $x \rightarrow -3^+$ olduğuna göre, $x^2 + 40x + 1$ ifadesinin değerinden küçük en büyük tam sayı kaçtır?

2) $\lim_{x \rightarrow a^2} \left(\frac{13}{1+x} \right) = \frac{1}{2}$ ise $a > 0$ sayısı kaçtır?

3) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + ax + 5) = 0$ ise a sayısı kaçtır?

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(3^x + 4^x)}{5^x} \right) = ?$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \log(x-3) = ?$

6) $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x-3) = ?$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-2) = ?$

8) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ve
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x) - 3f(x) + 2) = 0$ ise
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ kaç olabilir?

9) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^{70} - 2x^{69} + 3x^2 + 4) = ?$

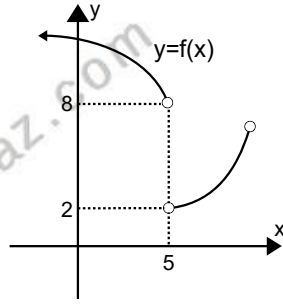
10) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x-5}{x^2+25} \right) = ?$

LİMİT - 1

KAVRAM VE ÖZELLİKLER

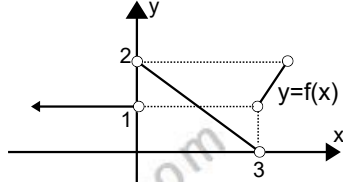
11)

a) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$



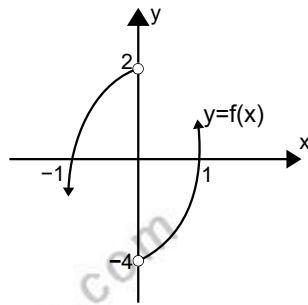
b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$

12) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = ?$



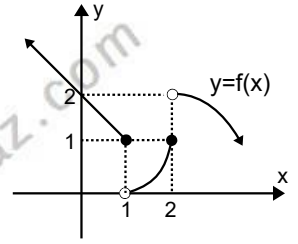
13)

$\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3)} = ?$

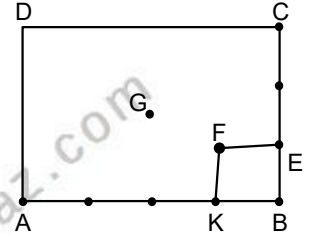


14)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f \circ f)(x) = ?$



15) ABCD bir dikdörtgen ve G noktası bu dikdörtgenin ağırlık merkezi olsun. F noktası ABCD nin iç bölgesinde bir noktadır.



$|BE| = \frac{|BC|}{3}$ $|BK| = \frac{|BA|}{4}$ ise

$\lim_{F \rightarrow G} \left(\frac{A(ABCD)}{A(BEFK)} \right) = ?$

LİMİT – 2

PARÇALI VE MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYON

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ :

I. PARÇALI FONKSİYONUN LİMİTİ :

Limit alınacak nokta kritik nokta değilse önce dal seçilir, sonra normal limit işlemi uygulanır. Limit alınacak nokta kritik nokta ve istenen yön belirtilmemişse bu noktada sağ ve sol limit değerine bakılarak karar verilir.

Örnek...1 :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ; x \leq 5 \\ x^2-26 & ; x > 5 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$

değerlerini hesaplayınız.

Örnek...2 :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & ; x < 2 \\ 2x+1 & ; x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

Örnek...3 :

$$f(x)=\begin{cases} e^x - \ln x, & x \geq 1 \\ x^2 + a, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tüm reel sayılar için limiti varsa a kaçtır?

II. MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN LİMİTİ:

Mutlak değer içeren fonksiyonun limiti alınmadan önce fonksiyonun aranan x değeri civarında kuralının ne olacağı bulunmalıdır. Limit alınacak nokta kritik nokta ise bu noktada sağ ve sol limit değerine bakılarak karar verilir

Örnek...4 :

$f(x)=|x^2-4|$ fonksiyonu için,

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = ?$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = ?$

Örnek...5 :

$f(x)=x \cdot |x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında limit var mıdır?

Örnek...6 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

LİMİT – 2

PARÇALI VE MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYON

DEĞERLENDİRME

1)
$$f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x < 1 \\ e^x & x \geq 1 \end{cases}$$
 şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$

2)
$$f(x) = \begin{cases} mx+n, & x < 0 \\ ax^2+bx+3n-2, & x > 0 \end{cases}$$
 şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için her reel sayı için limite sahipse n kaçtır?

3)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < 0 \\ x^2-4kx+m-k, & 0 \leq x < 3 \\ mx+2, & x \geq 3 \end{cases}$$
 şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için her reel sayı için limite sahipse (m,k) kaçtır?

4)
$$f(x) = \begin{cases} x^3-x, & x < 1 \\ x^2+3x-4, & 1 \leq x \leq 2 \\ x+7, & x \geq 2 \end{cases}$$
 şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kaç reel sayı değerinde limite sahip değildir?

5) $\lim_{x \rightarrow 0} 5^{|x-2|} = ?$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x+3} \right| = ?$

7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = ?$

8) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left| \frac{x^2-4}{x+2} \right| = ?$

(Y.G: Önce fonksiyonu tanımlayıp sonra limiti alınız)

LİMİT – 3

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

LİMİT HESABINDA BELİRSİZLİK DURUMLARI

$y=f(x)$ fonksiyonu için bazen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

değeri bulunurken x yerine a yazdığımızda

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, \infty^0$ durumları ile

karşılaşabiliriz. Sonuç olarak $f(x)$ fonksiyonunda $x \rightarrow a$ veya $x \rightarrow \infty$ için hesaplanan limit yukarıdaki ifadelerden biri oluyorsa, bir belirsizlik durumu vardır denir. Belirsizlik giderilerek limit var ise bulunabilir.

Limit hesaplandığında ortaya çıkan sayıların gerçek 0 ve gerçek 1 olmayabileceğine dikkat ediniz.

$\frac{0}{0}$ BİÇİMİNDEKİ BELİRSİZLİKLER

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ belirsizliği giderilirken

- kesrin pay ve paydasında $(x-a)$ çarpanı sadeleştirilebilir
- pay ve payda 1 ile genişletilebilir (!!)
- değişken değiştirilebilir

Son durumda ifadeler düzenlenir, sadeleştirme yapılır ve limit alınır.

Örnek...1 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = ?$$

Örnek...2 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} = ?$$

Örnek...3 :

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)^2}{x^2 - 36} = ?$$

Örnek...4 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^3 - 27} = ?$$

Örnek...5 :

$$\lim_{h \rightarrow y} \frac{y^2 - h^2}{h^6 - y^6} = ?$$

Örnek...6 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{x} - 1} = ?$$

Yol gösterme: $x=t^6$ değişken değiştirmesi yapabilirsiniz.

LİMİT – 3

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

UYARI

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oluyorsa

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olmalıdır. Buradaki bölümün

limit değeri belirsizlik kaldırıldıktan sonra bulunmuştur.

Örnek...7 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2}{x - 1} = k \in \mathbb{R} \text{ ise } a + k = ?$$

Örnek...8 :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = n \in \mathbb{R}$ ise (m, n) ikilisini bulunuz.

Örnek...9 :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + mx + 3} = \frac{1}{2} \text{ ise } m = ?$$

LİMİT – 3

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

DEĞERLENDİRME – 1

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4} = ?$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{8}{7}} \frac{49x^2 - 64}{6x^5 - 3x^3 - 8x + 9} = ?$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 8x + 15} = ?$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + 3x + 2}{x + 2} = k \in \mathbb{R}$ ise $a + k = ?$

5) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 + mx + 1} = r \neq 0$ ise $m = ?$

6) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x^3 - 1} = ?$

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$ için $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
 $a \in A$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ oluyorsa

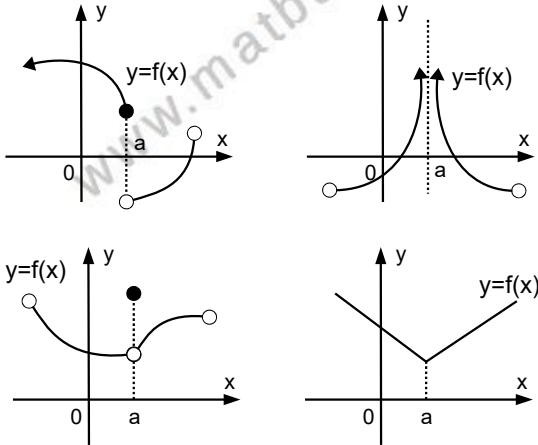
f fonksiyonu a noktasında sürekli denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada **süresiz bir fonksiyon** denir.

Tanıma göre f a da sürekli ise:

- 1) f fonksiyonu a da tanımlı,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ var ve
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

Örnek...1 :

Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar $x=a$ noktasında sürekli midir?



Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x \geq 3 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} & ; x < 3 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=3$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x-1} & ; x = 0 \\ \frac{1 + \sin x}{2 + x} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli ise a kaçtır?

Örnek...4 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{41}}{x^3 - x}$$

fonksiyonu hangi noktalarda süresizdir?

TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
Her $x \in A$ için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardır.

SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

- 1) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ise f soldan sürekli
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ise f sağdan sürekli

denir.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

Örnek...5 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; x < 5 \\ ax + 4 & ; x = 5 \\ (b-3)x + 4a & ; x > 5 \end{cases}$$

fonksiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise $a-5b$ kaçtır?

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

SÜREKSİZLİK

$I \subset \mathbb{R}$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x=a$ noktasında sürekli değil ise f fonksiyonu $x=a$ noktasında süreksizdir denir.

BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

1) RASYONEL FONKSİYONLAR :

$f(x)=P(x)/Q(x)$ ve $P(x)$ ve $Q(x)$ polinom fonksiyonlar ise $Q(x)=0$ olduğu noktalarda f de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Örnek...6 :

$f(x)=\frac{5x-3}{x^2-5x+6}$ fonksiyonun süreksiz olduğu noktaların apsileri toplamı kaçtır?

2) İRRASYONEL FONKSİYONLAR:

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x) \geq 0$ için süreklidir.

Örnek...7 :

$f(x)=\sqrt[12]{2x-3}$ ve $g(x)=\frac{x^2}{x^2-x^4}$ fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir?

3) PARÇALI FONKSİYONLAR :

Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığı araştırılmalıdır.

Örnek...8 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} ; & x < 0 \\ \ln(x+1) ; & x = 0 \\ \frac{x}{x^2-1} ; & x > 0 \end{cases}$$

kaç noktada süreksizdir?

Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları aralıkları yazınız?

a) $f(x)=3x^2-5x+2$

b) $h(x)=\frac{\sin x}{2-\cos x}$

c) $u(x)=\sqrt{x^2-x+12}$

d) $v(x)=\sqrt[3]{x-12}$

e) $t(x) = \begin{cases} x^2-x ; & x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-4} ; & x > 0 \end{cases}$

Örnek...10 :

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} ; & x \neq 3 \\ \frac{m \cdot \cos(x-3)}{x^2+9} ; & x = 3 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli ise m değeri kaçtır?

BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g:A \rightarrow \mathbb{R}$ $x=a \in A$ da sürekli iki fonksiyon ise $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ve $k \cdot f$ ($k \in \mathbb{R}$) fonksiyonları da sürekli olur.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon ise

- 1) f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani Her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| < B$ olacak şekilde $B \in \mathbb{R}$ vardır.
- 2) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.
- 3) $a < x_1 < x_2 < b$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise Bazı $c \in (x_1, x_2)$ öyle ki $f(c) \in (f(x_1), f(x_2))$

Örnek...11 :

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x)=x^2+3x$ fonksiyonu x eksenini keser mi?

LİMİT - 4

SÜREKLİLİK

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2}}$
fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

- 2) $f(x) = \sqrt{9 - |4x - 12|}$
fonksiyonunu sürekli yapan x değerleri nedir?

- 3) $v(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2-1}}$
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

- 4) $g(x) = \log_{x-2}(\ln x)$
fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

- 5) $f(x) = 2^{\frac{x^2}{x^3-5}}$
fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

- 6) $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & ; & x < 3 \\ ax + b & ; & x = 3 \\ bx + 2 & ; & x > 3 \end{cases}$
sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

- 7) $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2-7} & ; & x < 3 \\ \frac{ax}{x+2} & ; & x = 3 \\ bx - 2 & ; & x > 3 \end{cases}$
fonksiyonu tam olarak 2 noktada süreksiz bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

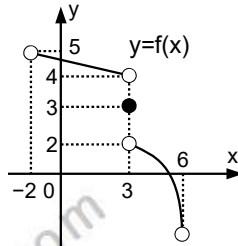
- 8) $g(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$
fonksiyonunu $[0, 2\pi)$ aralığında süreksiz yapan x değerleri kaç tanedir?

LİMİT - 4

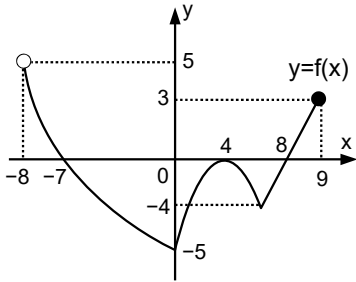
SÜREKLİLİK

- 9) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x - m}$ fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli ise m nasıl seçilmelidir?

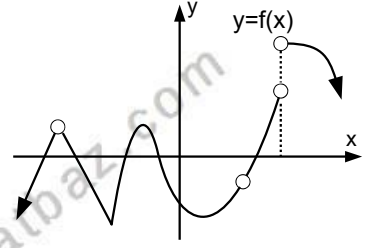
- 10) Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonu $(-2, 6)$ aralığında sürekli olduğu x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?



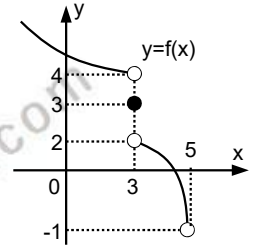
- 11) Grafiğe göre $g(x) = \frac{1}{1+f(x)}$ fonksiyonu $(-8, 9)$ aralığında kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



- 12) Grafiğe göre $y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



- 13) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği veriliyor $f(x)+g(x)$ süreklidir. Buna göre $g(x)$ fonksiyonu nasıl bir grafiğe sahip olabilir, çiziniz?



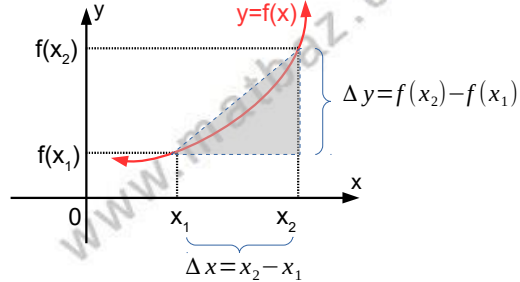
Limit konusuna katkıları için araştırınız
Salih Zeki

TÜREV - 1

KAVRAM

ORTALAMA DEĞİŞİM

Şekli inceleyiniz.



ortalama değişim $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ olarak

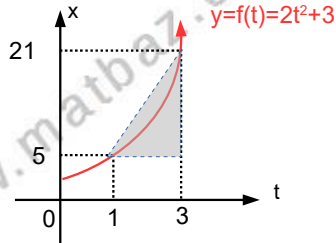
tanımlanır.

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ifadesinde $x_2=x_1+h$ alınır ve

h sayısına küçük değerler verilirse **anlık değişim** elde edilir

Ortalama hız, konum değişiminin zamandaki değişime oranıdır.

Örnek...1 :



Yukarıda x(konum) t(zaman) grafiği verilen bir hareketlinin

a) 1. ve 3. saniyeler arası ortalama hızını bulunuz.

b) 3.saniyedeki anlık hızını bulunuz. Bunun için $t=3$, $t=3+h$ anları için önce ortalama hızı , sonra da hesaplanan bu hızın h çok küçük değerler alırken değerini hesaplayınız

BİR NOKTADA TÜREV

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi denir. f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ sembollerinden biri ile gösterilebilir. Eğer bir fonksiyonun x_0 noktasında türevi varsa fonksiyon o noktada türevlenebilir denir.

Örnek...2 :

$f(x)=x^2$ fonksiyonu için $x=2$ noktasındaki türevi türev tanımını kullanarak bulunuz.

HATIRLATMA:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ değerinin olabilmesi için

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ olması gerekirdi.

Benzer şekilde f fonksiyonun x_0 noktasında türevinin yani

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ limitinin olabilmesi için

(1) $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ ve

(2) $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$ limitlerinin

mevcut olması ve bu limitlerin birbirine eşit olması gerekir.

Burada (1) e fonksiyonun $x=x_0$ noktasında sağdan türevi (2) ye ise fonksiyonun $x=x_0$ noktasında soldan türevi denir.

Kritik noktaya sahip fonksiyonlar eğer

1. bu noktada sürekli
2. bu noktada sağdan ve soldan aynı türev değerlerine sahipse, türeve sahiptir.

TÜREV - 1

KAVRAM

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda türevli midir?

Örnek...4 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ noktasında türevli midir?

Örnek...5 :

$f(x)=|x|$ fonksiyonun $x=0$ noktasında türevi var mıdır?

NOT

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \text{ ifadesinde } x = x_0 + h$$

alınırsa $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$ olarak yeniden yazılmış olur.

Örnek...6 :

$y=f(x)=3x+1$ fonksiyonu için $f'(5)=?$

TÜREV FONKSİYONU

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
 $[a, b]$ nin alt kümesinden \mathbb{R} ye

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona f fonksiyonun türev fonksiyonu denir.

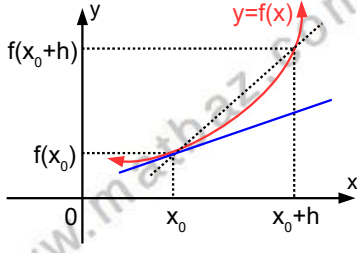
Örnek...7 :

$f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu için $f'(x)$ fonksiyonunu hesaplayınız.

TÜREV - 1

KAVRAM

TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ



Şekilden de anlaşılacağı gibi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) \text{ limit değeri eğer}$$

varsa $x=x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimini verir. Başka bir deyişle $f'(x_0)$ değeri $y=f(x)$ eğrisine $x=x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimidir.

TEOREM (TÜREV SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ)

Bir fonksiyon bir noktada **türevli** ise o noktada **sürekli**dir.

TEOREMİN SONUÇLARI

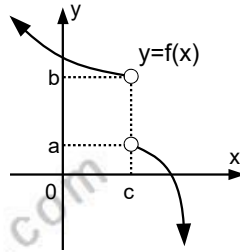
- 1) $f(x)$ fonksiyonu herhangi bir noktada **sürekli değilse** bu noktada **türevli de değildir**.
- 2) $f(x)$ fonksiyonu sürekli iken türevli **olmayabilir**.

Örneğin $f(x)$ grafiğinde köşelere sahip olduğu noktalarda türev değerine sahip değildir.

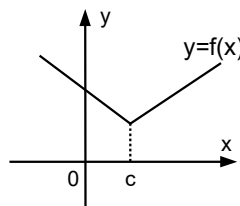
Aşağıdaki örneğin şekillerini inceleyiniz.

Örnek...8 :

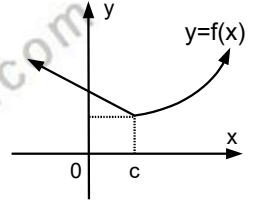
a) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında süreksiz olduğundan türevsizdir.



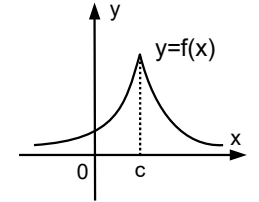
b) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



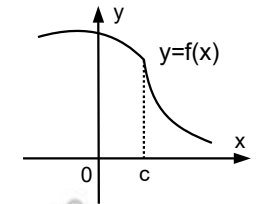
c) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



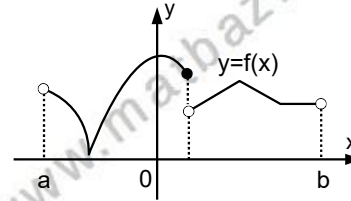
d) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



e) $y=f(x)$ fonksiyonu $x=c$ noktasında teğetin eğimi sonsuz olduğundan türevsizdir.

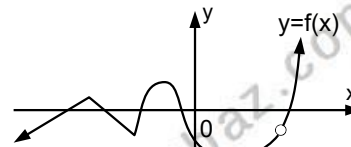


Örnek...9 :



(a,b) aralığında $y=f(x)$ fonksiyonu kaç noktada türeve sahip değildir?

Örnek...10 :



Şekilde grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

TÜREV - 1

KAVRAM

Örnek...11 :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x + a}$$

fonksiyonu \mathbb{R}' de türevli ise a nasıl seçilmelidir?

Örnek...12 :

$$f(x) = \begin{cases} 6x + ax^2 & x < 0 \\ 2kx + c + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu Reel sayılar kümesinde türevli ise c kaçtır?

DEĞERLENDİRME

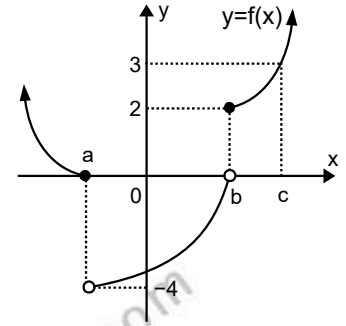
1) $f(x) = 3x + 5$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \right) = ?$

2) $f(x) = 3x^2$ ise $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = ?$

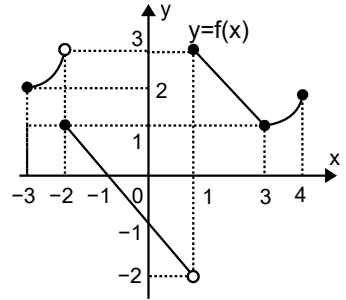
3) $f(x) = x^3$ fonksiyonu için türev tanımını kullanarak $x=2$ noktasındaki türevini bulunuz.

4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında türevli midir?

5) Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun reel sayılarda kaç noktada türevi yoktur?



6) Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için, $(-3, 4)$ aralığında kaç noktada sürekli olduğu halde türevi yoktur?



7) $f(x) = \frac{mx+2}{mx^2-x+3}$ fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ de türevli ise m nasıl seçilmelidir?

TÜREV - 2

KURALLAR-1

TÜREV KURALLARI :

Takip eden türev kurallarının hepsi türevin limit tanımı kullanılarak bulunmuştur. Biz bunlardan sadece ilk ikisinin ispatını vereceğiz.

SABİT FONKSİYONUN TÜREVİ

$$f(x)=c \in \mathbb{R} \text{ ise } f'(x)=0 \text{ olur.}$$

İSPAT

$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{c-c}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{0}{h} \right) = 0$$

Örnek...1 :

$$f(x)=-7 \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...2 :

$$f(x)=-3\frac{\pi^e}{2} \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...3 :

$$f(x)=\sin^2 x + \cos^2 x \text{ ise } f'(x)=?$$

KUVVET FONKSİYONUN TÜREVİ

$$f(x)=x^n \text{ ise } f'(x)=n \cdot x^{n-1}$$

İSPAT

Örnek...4 :

$$f(x)=x \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...5 :

$$f(x)=x^3 \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...6 :

$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...7 :

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...8 :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ ise } f'(x)=?$$

UYARI

f türevlenebilen bir fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$ ise $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ olur.

TÜREV - 2

KURALLAR-1

Örnek...9 :

$$f(x)=9x^3 \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...10 :

$$f(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...11 :

$$f(x)=\frac{12}{\sqrt[3]{x}} \text{ ise } f'(x)=?$$

TOPLAM VEYA FARKIN TÜREVİ

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon ise $f \oplus g$ de f ve g nin türevlenebildiği noktalarda türevlenebilir ve $(f \oplus g)' = f' \oplus g'$

Örnek...12 :

$$f(x)=x^3+x^2 \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...13 :

$$f(x)=3x^7-2x^6 \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...14 :

$$f(x)=6x^3-7x^2+\frac{1}{x} \text{ ise } f'(1)=?$$

Örnek...15 :

$$f(x)=ax^b+bx^a \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...16 :

$$f(x)=(x^3+x^2)(4x-3) \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...17 :

$$f(x)=\frac{4x^3-3x^2-6x+5}{x^2} \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...18 :

f(x) polinom fonksiyon ve $f(x)+f'(x)=2x^2-3x+2$ ise $f(0)=?$

TÜREV - 2

KURALLAR-1

Örnek...19 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{30} (-x)^{1+k} \text{ ise } f'(1) = ?$$

Örnek...20 :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{30} \left(\frac{1}{x}\right)^i \text{ ise } f'(1) = ?$$

Örnek...21 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^2 \left(\frac{x^n}{n!}\right) \text{ ise } f'(1) = ?$$

ÇARPIMIN TÜREVI

f ve g iki fonksiyon olmak üzere, f . g fonksiyonu da f ve g nin türevlenebildiği noktalarda türevlenebilir ve

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Örnek...22 :

$$f(x) = x^2(4x-3) \text{ ise } f'(x) = ?$$

Örnek...23 :

$$f(x) = (x^2-x) \cdot (x^2+1) \text{ ise } f'(-1) = ?$$

Örnek...24 :

$$f(x) = (x^2+2x+4) \cdot (x-2) \text{ ise } f'(10) = ?$$

Örnek...25 :

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ ise } f'(4) = ?$$

TÜREV - 2

KURALLAR-1

Örnek...26 :

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \text{ ise } f'(3)=?$$

BÖLÜMÜN TÜREVİ

f ve g iki fonksiyon olmak üzere $\frac{f}{g}$ de f ve g nin türevlenebildiği noktalarda türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Örnek...27 :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{1+x} \text{ ise } f'(x)=?$$

Örnek...28 :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+5} \text{ ve } f^{-1}(x)=h(x) \text{ ise } h'(x)=?$$

Örnek...29 :

$$f(x) = \frac{3x^5-5x^3+1}{x^3-1} \text{ ise } f'(0)=?$$

Örnek...30 :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} \text{ ise } f'(1)=?$$

TÜREV - 2

KURALLAR-1

DEĞERLENDİRME

1) $f(x) = \sin^2 2x - \cos^2 2x + \cos 4x$ ise $f'(x) = ?$

2) $f(x) = \sum_{k=0}^3 (x)^{-k+2}$ ise $f'(1) = ?$

3) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$ ise $f'(64) = ?$

4) $f(x)$ polinom fonksiyon ve $f(x) \cdot f'(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + d$ ise d kaçtır?

5) $f(x) = (x^3 + x^2)(4x - 3)$ ise $f'(1) = ?$

6) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-10)$ ise $f'(4) = ?$

TÜREV - 2

KURALLAR-1

7) $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + 1}$ ise $f'(1) = ?$

8) $x > 0$, $f(x) = \frac{\sum_{k=1}^5 x^{2k}}{\sum_{k=1}^5 x^{2k-1}}$ olduğuna göre $f'(1) = ?$

9) Fonksiyonların önce terslerini sonra türevlerini bulunuz

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$ ise $(f^{-1})'(x) = ?$

b) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ ise $(f^{-1})'(1) = ?$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2}$ ise $(f^{-1})'(x) = ?$

TÜREV - 3

KURALLAR-2

TÜREVDE BİLEŞKE KURALI

$f:A \rightarrow B$ ve $g:B \rightarrow C$ olmak üzere,
 $g \circ f:A \rightarrow C$ verilsin. f fonksiyonu x
noktasında ; g fonksiyonu ise $f(x)$
noktasında türevlenebiliyorsa $(g \circ f)(x)$
fonksiyonu x noktasında türevlidir ve

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

olarak tanımlanmıştır

Örnek...1 :

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$ olarak veriliyor,

a) $(f \circ g)'(x) = ?$ b) $(g \circ f)'(x) = ?$

Örnek...2 :

$f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = x^3 + 2$ olarak veriliyor,

a) $(f \circ g)'(2) = ?$ b) $(g \circ f)'(2) = ?$

Örnek...3 :

$f(x) = 3x^2 - x$ ise $(f \circ f)'(1) = ?$

NOT

$y = u(x)$, x e bağlı bir fonksiyon ise,
 $y = f(u) \rightarrow y' = f'(u) \cdot u'$ biçimindedir.

Örneğin $y = f(x^2 + x) \rightarrow y' = f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$ dir.

Örnek...4 :

$f(x^2 - x) = 6x^3 - 2$ ise pozitif x için $f'(2) = ?$

Örnek...5 :

$f(x^3) = 2x^2 - 5x + 6$ ise $f'(-8) = ?$

BİLEŞKE VE KUVVET KURALININ GENELLEMESİ

$$y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

Örnek...6 :

$y = f(x) = (x^3 + 8x^2 - 6x + 1)^3$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

Örnek...7 :

$f(x) = (x^2 - x - 1)^8$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

TÜREV - 3

KURALLAR-2

Örnek...8 :

$$f(x)=(x^3+x)^3+(4-2x)^2 \text{ ise } f'(0) = ?$$

Örnek...9 :

$$g(5)=-3, g'(5)=-2 \text{ ve } f(x)=g^4(x^3-3) \text{ ise } f'(2) = ?$$

Örnek...10 :

$$f(x)=\sqrt{x^2+3x+2} \text{ ise } f'(3) = ?$$

Örnek...11 :

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}} \text{ ise } f'(1) = ?$$

Örnek...12 :

$$g^2(x^3+1)=f^3(x^2+1) \cdot h(3x-1) \text{ için}$$

$f(2)=3$	$g(2)=-2$	$h(2)=-1$
$f'(2)=4$	$g'(2)=1$	$h'(2)=?$

Örnek...13 :

$$f(x)=2x^2-3x \text{ ve } g(x)=x-x^2, h(x)=3x-4 \text{ ise } (hogof)'(2)=?$$

ZİNCİR KURALI

$$\begin{aligned} y &= f(u) \\ u &= g(t) \\ t &= h(x) \end{aligned} \text{ ise } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

olarak hesaplanır.

Örnek...1 :

$$y=u^2-2u, u=x^3-x \text{ ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

Örnek...2 :

$$y=3x^2-2x, x=\frac{1}{u}, u=n^2-3n+1$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dn}$ $n=0$ için kaçtır?

Örnek...3 :

$y=t^2+5t, t=6u^2, u=2x-3$ ise $\frac{dy}{dx}$ $x=1$ için kaçtır?

TÜREV - 3

KURALLAR-2

DEĞERLENDİRME

1) $f(x)=2x^3+3x$, $g(x)=x^3-4$ ise $(f \circ g)'(1)=?$

2) $f(2x^3+3)=6x^2-3x+2$ ise $f'(1)=?$

3) $f(x)=(2x^4-3x+1)^5$ ise $f'(2)=?$

4) $f^2(x^2-2)=g^2\left(\frac{x^3}{2}-2\right) \cdot h(2x^2-3x)$ için
 $f(2)=1$, $g(2)=4$, $h(2)=-2$, $f'(2)=-2$ ve $g'(2)=-3$
olduğuna göre, $h'(2)$ kaçtır?

5) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ise $f'(1)=?$

6) $y=x^2-2x$, $x=u^3+5u-32$ ise $\frac{dy}{du}=?$

7) $y=x^2+3x$, $x=t^3+t$, $t=u^2-3u+1$ ise $\frac{dy}{du}$ $u=0$
için kaçtır?

8) $x=2t$ ve $y=2t^2+3t$ parametrik eşitlikleri ile verilen
eğri için $\frac{dy}{dx}=?$ (Önce $y=f(x)$ i elde ediniz)

TÜREV - 3

KURALLAR-2

9) Fonksiyonların önce terslerini sonra türevlerini bulunuz

a) $f:(-\infty, -3) \rightarrow (-6, \infty)$, $f(x)=x^2+6x+3$ ise $(f^{-1})'(x)=?$

b) Uygun şartlarda tanımlı $f(x)=\sqrt{x+2}$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(x)=?$

c) $f:\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}-\{\frac{4}{3}\}$, $f(x)=\frac{4x-7}{3x-5}$ ise $(f^{-1})'(x)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

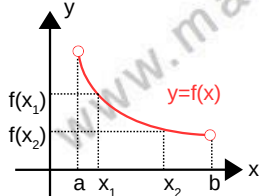
d) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^5+2$ ise $(f^{-1})'(34)=?$

TÜREV -4

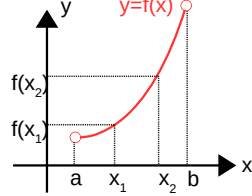
ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

TÜREV VE ARTANLIK AZALANLIK

$f:A\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)$ olsun
her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu **artan**
her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu **azalan** fonksiyondur.



Her $x_1 < x_2$ ve $f(x_2) < f(x_1)$ olduğundan $f(x)$ azalandır



Her $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan $f(x)$ artandır

TEOREM

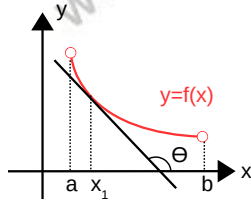
$f:A\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)$ olsun. Türevli $y=f(x)$ fonksiyonunda

$\forall x \in (a, b) \subset A$, $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artandır;

$\forall x \in (a, b) \subset A$, $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalan bir fonksiyondur.

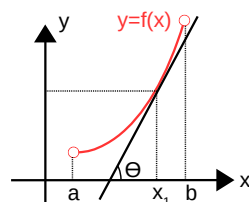
Geometrik yorum: Verilen aralıkta çizilen teğet doğruların eğim açıları ürevin işaretidir

Azalan fonksiyon



$$m = \tan\theta = f'(x_1) < 0$$

Artan fonksiyon



$$m = \tan\theta = f'(x_1) > 0$$

Özet olarak bir fonksiyonun artanlığı ve azanlığı araştırılırken fonksiyonun türevinin işaretine göre yorum yapılır.

İspat $x_0 \in (a, b)$ ve $f'(x_0) > 0$ olsun. Bu durumda $f'(x_0^+) > 0$ olur. Yani

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

limitinin değeri de pozitiftir. $h > 0$ olduğundan $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ veya $f(x_0+h) > f(x_0)$ olmalıdır. $f'(x_0^+) > 0$ olduğu durumu da siz gösteriniz

Örnek...1 :

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

Örnek...2 :

$f(x) = x^2 + 4x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

Örnek...3 :

$f(x) = x^3 - x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

Örnek...4 :

$f(x) = x^3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

TÜREV -4

ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

Örnek...5 :

$f(x)=\frac{x^3}{3}-mx^2+4x+2$ fonksiyonunun daima artan olması için m nasıl seçilmelidir ?

Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonu $(-5,-1)$ aralığında negatif tanımlı artan bir fonksiyon ise aynı aralıkta aşağıda verilen fonksiyonların artanlık azalanlık durumlarını inceleyiniz

a) $y=f^2(x)$

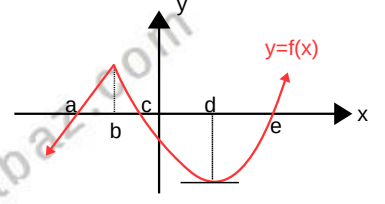
b) $y=\frac{1}{f(x)}$

c) $y=x \cdot f(x)$

d) $y=f(x^3)$ (uygun tanım kümesi için)

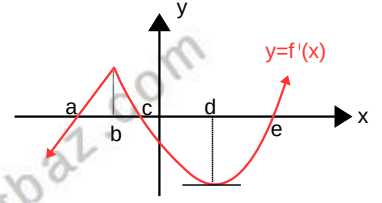
Örnek...7 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz



Örnek...8 :

Türevinin grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz



TÜREV -4

ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

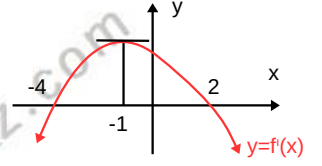
DEĞERLENDİRME

- 1) $y=f(x)=-x^2-3x+1$ fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık nedir?

- 2) $y=\ln e^{x^2-x+2}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz.

- 3) $f(x)=\frac{x^3}{3}-mx^2+mx+2$ fonksiyonunun daima artan olması için m nasıl seçilmelidir ?

- 4) Türevinin grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu en geniş açık (a,b) ise a^b kaçtır



- 5) $y=f(x)$ fonksiyonu $(-2,2)$ aralığında pozitif tanımlı azalan bir fonksiyon ise aynı aralıkta aşağıda verilen fonksiyonların artanlık azalanlık durumlarını inceleyiniz

a) $y=f^3(x)$

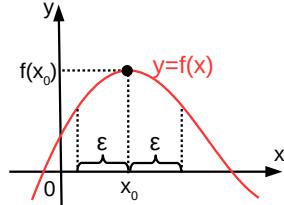
b) $y=f(-x)$

c) $\frac{1}{f(x)}$

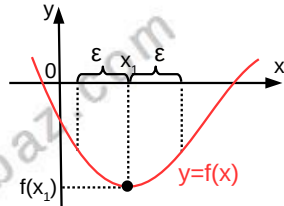
YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM:

$f: A \rightarrow B, y=f(x)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $X_0 \in (a,b)$ olmak üzere f fonksiyonu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ aralığında en büyük değerini x_0 noktasında alıyorsa fonksiyonun bu noktada yerel maksimumu vardır denir. Şekli inceleyiniz.

Yandaki şekilde x_0 içine alan bir aralıkta $f(x_0)$ değerinden daha büyük bir görüntüye sahip değer bulunmadığından $f(x_0)$ değeri yerel maksimum ve x_0 noktası yerel maksimum noktasının apsidisidir.



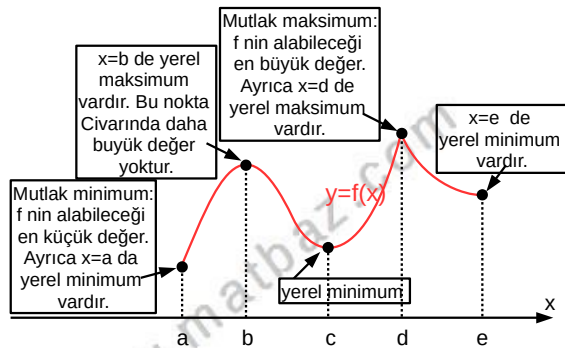
Benzer bir düşünceyle $x_1 \in (a,b)$ olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonu $(x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon)$ aralığında en küçük değerini x_1 noktasında alıyorsa fonksiyonun bu noktada yerel minimumu vardır denir. Şekli inceleyiniz.



Yerel maksimum veya yerel minimuma kısaca yerel ekstremum denir.

Özetlersek $x=x_0$ apsidini içide bulunduran en az bir açık aralıkta diğer tüm x değerleri için $f(x_0) \leq f(x)$ oluyorsa $x=x_0$ yerel minimum noktasının apsidisi; $f(x_0) \geq f(x)$ oluyorsa $x=x_0$ yerel maksimum noktasının apsidisi olur.

Şekli inceleyiniz.



TEOREM 1 : SÜREKLİ FONKSİYONLAR İÇİN EKSTREMUM DEĞER TEOREMİ

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu A da maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.

TEOREM 2

Eğer f fonksiyonu c gibi bir noktada ekstremum değerine sahip ve yine bu noktada türevlenebiliyorsa $f'(c)=0$ olur.

www.matbaz.com

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

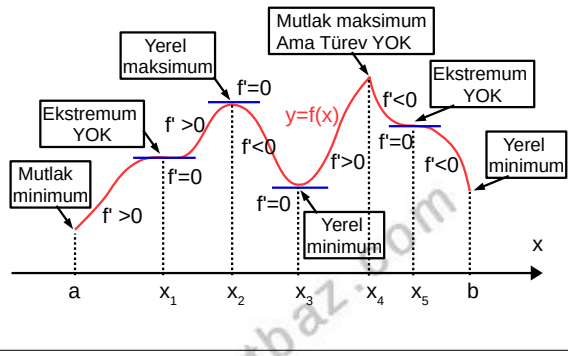
UYARI:

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin 0 olması fonksiyonun o noktada ekstremuma sahip olmasını gerektirmez.

KRİTİK NOKTA

x_0 , f fonksiyonun tanım kümesinin bir elemanı ve $f'(x_0)=0$ oluyorsa veya $f'(x_0)$ yoksa $x=x_0$ kritik nokta adını alır. Sınırlı bir aralıkta tanımlı noktalar için sınır değerleri de ekstremum için mutlaka araştırılmalıdır.

Genel olarak $y=f(x)$ fonksiyonu ekstremum değerlerini uç noktalarda veya kritik noktalarda alır.



Örnek...1 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-3x+2$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

Örnek...2 :

$f(x)=y=3x^4-16x^3+24x^2$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

Örnek...3 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=\frac{x}{3-4x}$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

Örnek...4 :

$f(x)=y=x^5+4x^2+ax-3$ fonksiyonun $x=2$ de ekstremumu varsa a ne olmalıdır?

Örnek...5 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3+mx^2+nx-2$ fonksiyonu $x=0$ da maksimum, $x=1$ de minimum değerine sahipse (m,n) ikilisini bulunuz?

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

Örnek...6 :

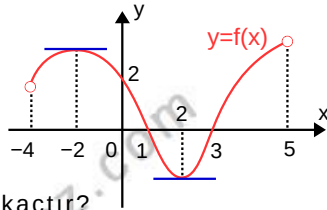
$f: [-3,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=3x^2-24$ fonksiyonunun maksimum değerini bulunuz?

Örnek...7 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-3x^2+6x+2$ veriliyor.
 $y=f'(x)$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz?

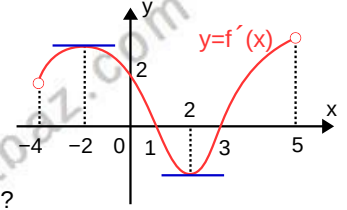
Örnek...8 :

Grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsilerinin çarpımı kaçtır?



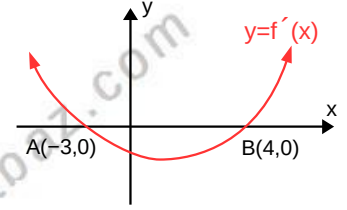
Örnek...9 :

Grafik $y=f'(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsilerini belirtiniz?



Örnek...10 :

Türevinin grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi nedir?



Örnek...11 :

$y=f(x)=x^3-3x^2+m$ fonksiyonunun grafiği x eksenini 3 noktada kesiyorsa m nin kaç farklı tamsayı değeri vardır?

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

Örnek...12 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3-3x^2+mx+n$ fonksiyonun tersi varsa en küçük m tamsayısı kaçtır?

Örnek...13 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=|x|$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri nedir?

Örnek...14 :

$f: [-2,4] \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x|x^2-1|+2x$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerleri nedir?

Örnek...15 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+1$ fonksiyonu ve $y=k$ fonksiyonu hangi k değerleri için 3 farklı noktada kesişir?

Örnek...16 :

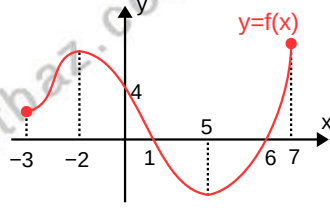
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^3+x^2+mx+3$ eğrisine $y=-3$ doğrusuna paralel olacak şekilde iki teğet çizilebiliyorsa m kaçtır?

TÜREV - 5

EKSTREMUM NOKTALARI

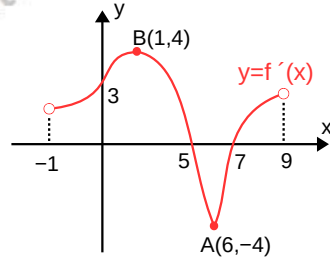
DEĞERLENDİRME

- 1) $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsilerini belirleyiniz.



- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^5-4x^2+mx+2$ fonksiyonu $x=1$ de ekstremuma sahipse m kaçtır?

- 3) $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisini belirleyiniz.



- 4) $f: [-2,3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=y=x^2+8x+1$ fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını bulunuz?

- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x|x|$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri var mıdır?

- 6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=mx^3-3x^2+x+n$ fonksiyonun tersi yoksa m kaçtır?

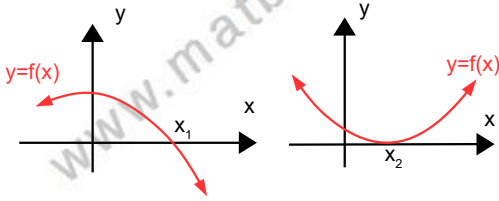
- 7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=\frac{x^2+mx+2}{x+3}$ yerel ekstremum değerleri çarpımı 4 ise m kaçtır?

POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN ÇİZİMLERİ

Polinom fonksiyonların grafikleri

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1x+a_0$ şeklindeki bir polinom fonksiyonunun grafiğini çizerken aşağıdaki yollar izlenir:

1. $f(x)$ in tanım kümesi bulunur. Bu fonksiyonlar her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.
2. $f(x)$ in eksenleri kestiği noktalar bulunur
 $x = 0$ için oy eksenini kestiği nokta,
 $y = 0$ için ox eksenini kestiği nokta bulunur. ($y = 0$ için bir x değeri bulunamıyorsa fonksiyonun Ox eksenini kesmediği anlaşılır)
3. Fonksiyonun geliş ve gidiş yönüne bakılır.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ limiti hesaplanır, bulunan değerler eğrinin uç noktalarının hangi bölgede olduğunu gösterir.
4. $y = 0$ için çift katlı bir kökü varsa bu kökte grafik Ox eksenine teğet; $y = 0$ için tek katlı bir kökü varsa bu kökte grafik Ox eksenini keser
Şekilleri inceleyiniz



x_1 tek katlı kök , x_2 çift katlı köktür.

5. $f(x)$ in türevine bakılır; yani fonksiyonun birin türevi alınıp sıfıra eşitlenir, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar belirlenir. Türevin kökleri varsa bulunur bulunan bu kökler fonksiyonda yerine yazılarak ekstremumlar elde edilir. Değişim tablosu yapılır.

6. Yukarıdaki tüm bilgileri tabloya aktarılır. Bu bilgilerin tamamı koordinat düzlemine aktarılarak grafik çizilmiş olur.

Örnek...1 :

Grafikleri çiziniz

1) $f(x)=x^2-2x-3$

2) $f(x)=x^3-9x$

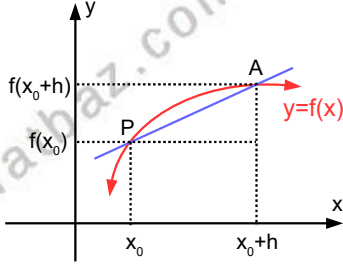
3) $f(x)=x^2(4-x^2)$

TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)$ fonksiyonuna düzlemde karşılık gelen eğri yanda ki gibi olsun. Eğrinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetlerini



araştıralım. Bunun için $P(x_0, f(x_0))$ noktasının sağda veya solundaki $A(x_0+h, f(x_0+h))$ noktasını alıp A ve P den geçen keseni çizelim. Dikkat edilirse kesenin eğiminin $m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ olduğu görülür. Şimdi P noktasından geçen teğeti bulmak için A noktasını eğri üzerinde kaydırarak P noktasına yaklaştıralım. Bu işlemi yapmakla h değerini 0 a yaklaştırmak aynı şey olacaktır. Bu halde teğetin eğimi $h \rightarrow 0$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ in alacağı limit değeri olacaktır.

EĞİM, TEĞET DOĞRU VE NORMAL DOĞRU

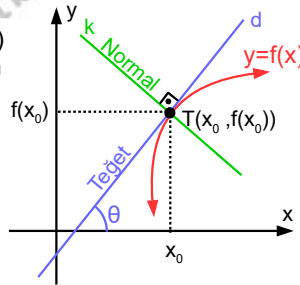
$y=f(x)$ fonksiyonun üzerindeki $(x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğet doğrunun eğimi m_d ise

$$m_d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

olur.

Ayrıca $m_d = \tan \theta$ dir.

T noktasında d teğet doğrusuna dik olan k doğrusuna ise $y=f(x)$ in T noktasındaki **normali** denir.



HATIRLATMA

Eğimi m ve (x_0, y_0) noktasından geçen doğrunun denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ olur.

Dik doğruların eğimleri çarpımı -1 dir. Yani, $m_d \cdot m_k = -1$ dir.

TEĞET DOĞRU DENKLEMİ

$$y - y_0 = m_d \cdot (x - x_0)$$

NORMAL DOĞRU DENKLEMİ

$$y - y_0 = \frac{-1}{m_d} \cdot (x - x_0)$$

Örnek...1 :

$y=f(x)=x^2-4x+3$ fonksiyonun $x=3$ noktasındaki teğetin eğimini bulunuz?

Örnek...2 :

$y=f(x)=x^3-x$ fonksiyonun $x=2$ noktasındaki normalinin eğimini bulunuz?

Örnek...3 :

$y=f(x)=x^2-7x$ fonksiyonun üzerindeki $P(1, f(1))$ noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz?

Örnek...4 :

$y=f(x)=4x^2$ fonksiyonun $x=2$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz?

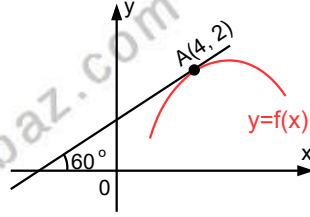
TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

Örnek...5 :

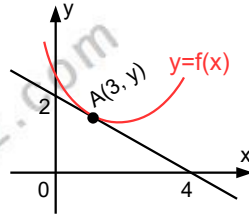
$y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x)=f^2(x)-\frac{5}{f(x)}$ ise g fonksiyonunun $x=4$ deki teğetinin eğimi kaçtır?



Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir. $h(x)=f^2(3x)$ ise h fonksiyonunun $x=1$ deki teğetinin eğimi kaçtır?



Örnek...7 :

$g(x)=\frac{x^3}{3}-3x+a$ ile $f(x)=2+x$ fonksiyonu teğetse a sayısının negatif değeri kaçtır?

Örnek...8 :

$f(x)=3x^2-6x+5$ ve $g(x)=mx^2+(n-2)x-3$ fonksiyonlarının her x için teğetleri paralelse m ve n yi bulunuz.

Örnek...9 :

$f(x)=x^2-3$ fonksiyonuna $A(4,0)$ noktasından çizilen teğetlerin değme noktalarının apsiler toplamını bulunuz?

Örnek...10 :

$f(x)=x^2+2$ fonksiyonuna üzerindeki $A(1,y)$ noktasından çizilen normal eğriyi başka hangi noktada keser?

TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

Örnek...11 :

Tanım: Kesim noktasında teğetleri dik olan eğrilere dik kesişen eğriler denir.

$f(x)=\frac{k}{x}$ ile $g(x)=\frac{x^2}{9}$ eğrileri dik kesişiyor ise k kaçtır?

Örnek...12 :

$f(x)=e^{\ln\sqrt{x}}$ eğrisine üzerinde apsisi e olan noktadan çizilen teğetin x eksenine sınırladığı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Örnek...13 :

$f(x)=\sqrt{4x-4}$ eğrisinin orijinden geçen teğetlerinin değme noktasının apsisi nedir?

Örnek...14 :

$y=x-7$ doğrusu üzerinde bulunup $y=x^2-x+5$ parabolüne en yakın noktanın koordinatları nedir?

Örnek...15 :

$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$ fonksiyonun x eksenine paralel teğetlerinin eğriye değdiği noktalar arası mesafe kaç birimdir?

Örnek...16 :

$f(x)=x^2-2x-8$ fonksiyonuna üzerindeki $A(0,k)$ noktasından çizilen teğetin eksenlerle oluşturduğu üçgenin alanı kaç birim karedir?

TÜREV -7

TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x)=x^2+ax+5$ eğrisinin x eksenini x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetlerin dik olması için a ne olmalıdır?

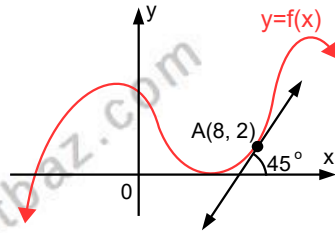
- 2) $y=f(x)=x^2-mx+4$ fonksiyonuna orijinden çizilen teğetler dikse m değeri kaçtır? $m>0$

- 3) $y=f(x)=x^2+2x+7$ fonksiyonunun hangi noktadaki teğeti orijinden geçer?

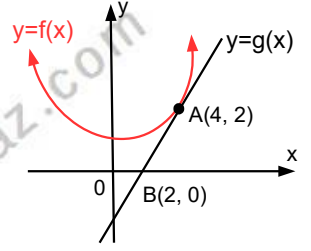
- 4) $y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.

$$g(x^2)=f^2(x^3)$$

ise $g'(4)=?$



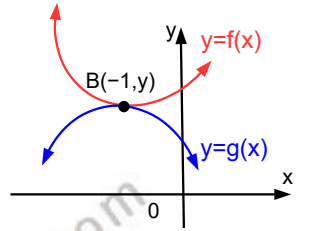
- 5) $y=f(x)$ parabolü ve bu parabolün A noktasındaki teğeti olan $y=g(x)$ doğrusu veriliyor.
- $$h(x)=\frac{k \cdot f(x)}{g(x)+x} \text{ için}$$
- $h'(4)=1$ ise k kaçtır?



- 6) B noktasında teğet olan $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ parabolleri veriliyor.

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \text{ için}$$

$h'(-1)=?$



- 7) $f(x)=x^2+3$ fonksiyonuna orijinden çizilen teğetlerin değme noktaları arası mesafe kaç birimdir?

- 8) $f(x)=x^2-x$ ve $g(x)=3x-x^2$ eğrilerinin kesim noktalarından f fonksiyonuna çizilen teğetlerin arasındaki açının tanjantı kaç olabilir?

TÜREV -7

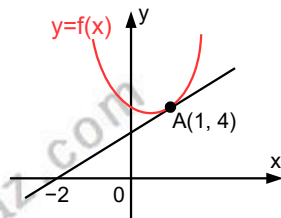
TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

- 9) $y=ax^2+bx+c$ parabolüne orijinden çizilen teğetler dikse a,b,c arası hangi bağıntı vardır?

- 10) $h(x)=x+\frac{4}{2x+3}$ fonksiyonunun x eksenine paralel teğetlerinin değme noktaları apsisi çarpımını kaçtır?

- 11) $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonun $x=1$ apsisli noktasından çizilen teğetin eksenlerle oluşturduğu bölgenin alanı kaç birim karedir?

- 12) $y=f(x)$ fonksiyonu ve A noktasındaki teğeti verilmiştir.
 $h(x)=x^2 \cdot f(x)$ ise h fonksiyonunun $x=1$ deki teğetinin eğimi kaçtır?



- 13) $g(x)=x^2+9$ fonksiyonuna hangi noktalardan çizilen teğetler orijinden geçer?

- 14) $y=x^2+4$ eğrisine $y=x$ doğrusunun en yakın noktasının apsisi kaçtır?

- 15) $y=x^2$ eğrisinin $x=1$ noktasındaki teğeti ve normali ile y eksenini arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİ :

Minimum ve Maksimum Problemlerini Çözmek İçin Genel Strateji

Adım 1. Problemin ne istediği, problemde ne verildiği belirlenir.

Adım 2. Probleme uygun model belirlenir : gerekirse şekiller çizilir. Minimum veya maksimum yapılması istenen niceliği temsil edecek değişken seçilir ve ekstremum değeri istenen fonksiyon yazılır

Adım 3. Adım 2 de bulunan fonksiyonun tanım kümesi bulunur.

Adım 4. Kritik noktalar bulunur

Adım 5. Model çözülür

Adım 6. Çözüm yorumlanır

Örnek...1 :

Toplamı 20 olan iki sayının çarpımı en çok kaçtır?

Örnek...2 :

$x+y=20$ ise $x^2 \cdot y$ en çok kaç eder?

Örnek...3 :

$x^2+(m-2)x+m^2-3m+1=0$ denkleminin kökleri çarpımı en küçük olduğunda kökler toplamı ne olur?

Örnek...4 :

$x^2-(2+m)x+4-m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir $x_1^2+x_2^2$ en az kaç olabilir?

Örnek...5 :

$f(x)=x^3-16x^2+5x+3$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun hangi noktadaki teğetinin eğimi en küçüktür?

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

Örnek...6 :

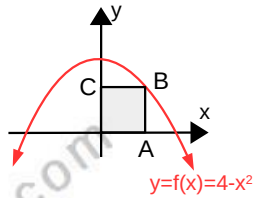
$f(x)=x^2+5x+3$ parabolü üzerinde bir noktanın koordinatları toplamı en az kaç olur?

Örnek...7 :

$y=\frac{12}{x}$ eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulunuz.

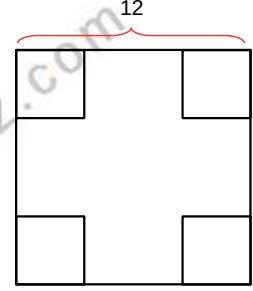
Örnek...8 :

Şekilde bir köşesi orjin bir köşesi $y=4-x^2$ ve iki kenarı eksenler üzerinde olan OABC dikdörtgenlerden alanı en büyük olanı kaç br^2 dir?



Örnek...9 :

Bir kenar uzunluğu 12 birim olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden eş karesel bölgeler çıkarılarak atılıp üstü açık bir kutu yapılıyor. Kutunun hacmi en çok kaç br^3 olur?



Örnek...10 :

Tüm ayrıtlarının toplamı 60 olan kare dik prizmanın hacmi en çok kaç cm^3 küptür?

Örnek...11 :

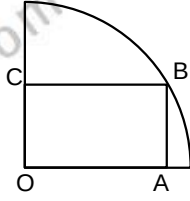
Yarıçapı 6 birim olan bir küreyi içine alabilecek minimum hacimli bir koninin yüksekliği en çok kaç birim olur?

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

Örnek...12 :

Şekilde O merkezli çeyrek dairenin çapı 24 birimse şekildeki gibi oluşturulabilecek dikdörtgenlerden alanı en çok olanın çevresi kaç birimdir?

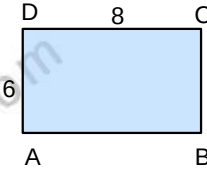


DEĞERLENDİRME

- 1) Çevresi 10 cm olan dikdörtgen alanının alabileceği maksimum değerini bulunuz.

Örnek...13 :

Şekildeki dikdörtgen biçimli nehirdeki hızı saatte 2 km/s ve karadaki hızı 3 km/s olan bir hareketlinin en kısa sürede A noktasından C noktasına varması için takip etmesi gereken yol ne olmalıdır?



- 2) Kenarları $x+3$ ile $8-2x$ olan dikdörtgenin alanı maksimum kaç birim karedir?

Örnek...14 :

Hipotenüsü 12 br olan bir dik üçgen dik kenarları biri etrafında döndürüldüğünde elde edilecek katı cismin hacmi en çok olduğunda alanı ne olur?

- 3) $x^2+(16m-m^3)x+1=0$ denkleminin kökler toplamının maksimum olması için m kaç olmalıdır ? ($m < 0$)

TÜREV-8

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

- 4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x$ fonksiyonun grafiği üzerinde ordinat ve absis toplamı en büyük olan noktayı bulunuz. ($x < 0$)

- 7) Taban yarıçapı 4cm ve yüksekliği 8 cm olan bir koni içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin yüksekliği kaç birimdir?

- 5) Bir köşesi orjin diğer iki köşesi eksenler ve son köşesi de $y=4-2x$ üzerinde olan dikdörtgenlerden alanı maksimum olanının çevresi nedir?

6

www.matbaz.com

- 6) İki köşesi bir yarım çember üzerinde, diğer iki köşesi bu yarım çemberin çapı üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanının en büyük değeri yarıçap cinsinden en çok kaç birim kare olur?

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

BELİRSİZ İNTEGRAL

$f:A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ için türevlenebiliyor ise $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ olur.

$df(x) = f'(x) \cdot dx$ ifadesine f fonksiyonun diferansiyeli denir

Bu ifade $dy = f'(x) \cdot dx$ olarak da yazılabilir.

Örnek...1 :

$y = x^2 + 3x + 5$ fonksiyonunun diferansiyeli , dy nedir?

Örnek...2 :

$x = (t^2 + 3t - 2)^3$ ise dx nedir?

İntegral alma işlemi türevi veya diferansiyeli belli olan fonksiyonun kendisini (ilkeli) bulmak için yapılan işlemdir.

Türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyonuna , $f(x)$ in belirsiz integrali (ilkeli) denir.

Yani $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$ ye $f(x)$ in ilkeli denir ve bu

$\int f(x) dx = F(x) + c$ ile gösterilir.

İntegral
sembolü \int integrand $f(x)$ ilkel $F(x) + c$ integral sabiti
integral değişkeni dx

Örneğin $\int 2x dx = x^2 + c$

İNTEGRAL ALMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int f(k) dk = \int f(m) dm \dots$$

TEMEL BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA KURALLARI

Birçok ilkel türeve ait kuralların tersine çevrilmesiyle elde edilir. Bunların bazıları şöyledir :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

Örnek...3 :

$$\int x^2 dx = ?$$

Örnek...4 :

$$\int dx = ?$$

Örnek...5 :

$$\int \frac{1}{x^3} dx = ?$$

Örnek...6 :

$$\int \sqrt{x} dx = ?$$

Örnek...7 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} dx = ?$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...8 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{3/2} \sqrt{x}} dx = ?$$

Örnek...9 :

$$\int (x+x^3-4) dx = ?$$

Örnek...10 :

$$\int \left(\sum_{k=0}^2 (k+1)x^k \right) dx = ?$$

Örnek...11 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dt = ?$$

Örnek...12 :

Teorem $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ olduğuna göre

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx \text{ integralini hesaplayınız}$$

TÜREV İNTEGRAL VE DİFERANSİYEL İLİŞKİSİ

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

$$2 \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$3 \quad \left(\int d(f(x) dx) \right) = f(x) + c$$

Örnek...13 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int x^2 dx \right) = ?$$

Örnek...14 :

$$d \left(\int x^2 dx \right) = ?$$

Örnek...15 :

$$\int d(x^2) = ?$$

Örnek...16 :

$$\int d(x^2) + \int d\left(\frac{1}{x} - x^2\right)$$

Örnek...17 :

$$\int f(x) \cdot x^2 dx = \frac{x^6}{6} - 3x + 1 \text{ ise } f(2) = ?$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...18 :

$$f(x) = \int d(x^2 - 2) \text{ ise } f'(9) = ?$$

Örnek...19 :

$f(x) = \int (x^2 - 3x + 1) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonunun $x=4$ de teğetinin eğimi nedir?

Örnek...20 :

$$\int \left(\frac{x}{x+2} \cdot f(x) \right) dx = 2x^2 - 3x + 2 \text{ ise } f(x) = ?$$

Örnek...21 :

Teorem. İki kez türevlenebilir $y=f(x)$ fonksiyonunda $f''(x)=0$ denkleminin tek katlı köklerine dönüm noktası denir.

$f(x) = \int (4x^2 - 2x + 3) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisini bulunuz

DEĞERLENDİRME

1) $\int \left(\sum_{k=1}^2 (k+1)x^k \right) dx$

2) $\int \frac{x+1}{2x+2} dx = ?$

3) $\int \left(\frac{8x^3 - 5x^2 + 7}{x^2} \right) dx = ?$

4) $\int 6x^2 \left(x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \right) dx = ?$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

- 5) f fonksiyonu $(2,3)$ noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45 derecelik açı yapıyor ve $f'(x)=2x-3$ ise $f(0)$ kaçtır?

- 6) $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $x=1$ noktasında çizilen teğetin eğimi 4 , $f''(x) = 6x + 2$ ve $f(1) = 2$ olduğuna göre, $f(2)$ kaç eşittir?

- 7) $y=f(x)$ fonksiyonunun her x gerçel sayısı için birinci türevi $(8x^2-6x)$ dir. $A(1,2) \in f$ ise $\int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) dx = ?$

- 8) Teorem. İki kez türevlenebilir $y=f(x)$ fonksiyonunda $f''(x)=0$ denkleminin tek katlı köklerine dönüm noktası denir.

$\int (f''(x)) dx = mx^2 + nx$ veriliyor. f fonksiyonunun dönüm noktası $A\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ dir. Bu fonksiyonun $x=1$ deki teğeti x eksenine pozitif yönde 45° yapmaktadır. Fonksiyon $x=-2$ de minimum değerine sahip olduğuna göre $(m+n)$ kaçtır?

- 9) $P(x)$ bir polinom fonksiyon ve $P(x) \int P(x) dx = 2x^3 + 9x^2 + 11x + 3$ ise bu polinomun katsayılar toplamı kaç olabilir?

10) $\int \left(\frac{d(x^3)}{x^2} \right) = ?$

11) $\int (d(x^3 + 4x + \sqrt{21})) = ?$

- 12) $\int (x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \frac{x^5}{5} - x$ veriliyor. f fonksiyonuna üzerindeki $A\left(\frac{1}{2}, y_0\right)$ noktasından çizilen teğet x eksenine pozitif yönde kaç derecelik açı yapar ?

İNTEGRAL-2

BASİT DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ 1 DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME METODU

$\int f(x)dx$ ifadesini hesaplayabilmek için sıklıkla türevde zincir kuralını tersine doğru işletiriz.

Yani $\int f(g(x)).g'(x)dx$ integrali $\int f(u)du$ biçiminde yazılır ve integral alınarak $F(u)+C=F(g(x))+c$ olur.

Değişken değiştirme dediğimiz bu yöntemi kısaca özetlersek.

Adım1 $\int f(g(x)).g'(x)dx$ ifadesinde $u=g(x)$ ve $du=g'(x)dx$ seçilerek $\int f(u).du$ elde edilir. (türevi var olan fonksiyona u der ve du yu hesaplayıp integrali u değişkenine göre tekrar yazarız)

Adım2 u değişkenine göre integral alınır

Adım3 sonuçta u yerine yazılır.

Örnek...1 :

$$\int (x^3+x^2)(5x^4+2x)dx=?$$

Örnek...2 :

$$\int (x^3+4x+e)^5.(5x^4+4)dx$$

Örnek...3 :

$$\int (3x-19)^{23}dx$$

Örnek...4 :

$$\int \frac{1}{(x+2)^{15}}dx$$

Örnek...5 :

$$\int \sqrt{x+2}dx$$

Örnek...6 :

$$\int \sqrt{6x-23}dx$$

İNTEGRAL-2

BASİT DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

Örnek...7 :

$$\int \frac{2x}{\sqrt{8x+3}} dx$$

Örnek...8 :

$\int f'(x) \cdot f''(x) dx$ integralinin $f(x)$ türünden eşiti nedir?

Örnek...9 :

$\int \left(\frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[4]{3x-1}} \right) dx$ integralinde $\sqrt[12]{3x-1} = t$ değişken değıştirmesi uygulanırsa hangi integral elde edilir?

DEĞERLENDİRME

1) $\int (4x^3 - 5x)(12x^2 - 5) dx = ?$

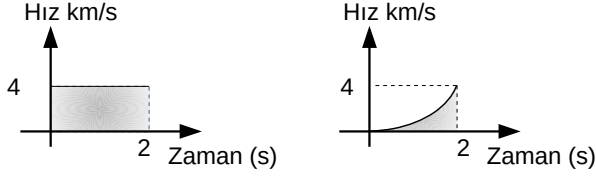
2) $\int \frac{1}{(6x-5)^{11}} dx = ?$

3) $\int \left(\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}} \right) dx = ?$

İNTEGRAL -3

RIEMANN TOPLAMI

Hız – zaman grafiğinin altında kalan alan alınan yolu vermektedir, Şekilleri inceleyiniz. Doğrusal bir yolda hareket eden kişilerin ilk 2 saatte aldıkları yolu, grafikleri ile x-ekseni arasında kalan alan yardımıyla bulalım.



Birinci kişi $4 \cdot 2 = 8$ km yol almıştır. İkinci kişinin aldığı yolu bulmak için eğrinin altında kalan alanı küçük dikdörtgenler yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayalım. [İnceleyiniz](#).

Şimdi bu alan hesabını genelleylim.

RIEMANN TOPLAMI OLARAK BELİRLİ İNTEGRALİ

$y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x eksenini arasında kalan ve $x = a$ ile $x = b$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanı

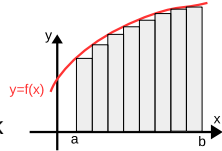
a) $y=f(x)$ grafiği doğrusal bir grafik olduğu zaman üçgen, yamuk gibi çokgensel alanların yardımıyla

b) $y=f(x)$ grafiği doğrusal bir grafik olmadığı zaman ise Riemann toplamı ile bulunur. (Riemann toplamı alanı bulmak için genel bir yöntem olup her türlü grafiğe sahip fonksiyonlarda kullanılabilir) Riemann toplamı yönteminde, tanım kümesi alt aralıklara bölünür ve her aralıktan alınan bir sayının görüntüsü ile elemanın alındığı aralığın boyu çarpılır. Son adımda elde edilen sonuçların toplamı hesaplanır

Riemann toplamının alt toplam ve üst toplam olmak üzere 2 çeşidini hesaplayacağız.

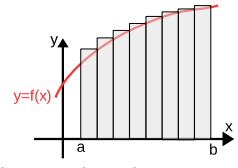
ALT TOPLAM

Alan bulunacak alt aralık olan $[a,b]$ için parçalanışının sınır noktalarında, yüksekliği eğrinin altında bulunacak şekilde belirlenen dikdörtgenlerin alanları toplamı Riemann alt toplamı olarak tanımlanmıştır. (A_T) (Başka bir deyişle $y=f(x)$ fonksiyonunun alt kısmında oluşan n tane dikdörtgenin alanları toplamına Riemann alt toplam denir.)



ÜST TOPLAM

Parçalanışının sınır noktalarında, yüksekliği eğrinin üstünde bulunacak şekilde belirlenen dikdörtgenlerin alanları toplamı Riemann üst toplamı olarak tanımlanmıştır. ($Ü_T$) (Başka bir deyişle $y=f(x)$ fonksiyonunun üst kısmında oluşan n tane dikdörtgenin alanları toplamına üst toplam denir.)



RIEMANN TOPLAMININ ADIMLARI

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

1.adım : Tabanların oluşturulması

Oluşturulacak dikdörtgenlerin taban uzunluklarını bulmak için $[a,b]$ aralığından $a=x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ olmak üzere $n+1$ nokta alınır. Bu $n+1$ noktanın oluşturduğu kümeye, $P = \{a=x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$ kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bölüntüsü (parçalanışı) denir.

2.adım: Taban uzunluklarının bulunuşu

Bir $[a,b]$ kapalı aralığının herhangi bir P parçalanışında $[x_0, x_1]$ ya birinci alt aralık $[x_1, x_2]$ ye ikinci alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$ ya k. alt aralık denir. Bu aralıkların uzunlukları $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olur ve bu aralıklardan en büyüğüne P parçalanışının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Eğer aralık boylarının hepsi eşit ise parçalanışa düzgün parçalanış denir. Düzgün parçalanışta her bir taban eşit uzunlukta olup bu sayı Δx ile gösterilire $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olacağı açıktır.

Örnek...1 :

$[0,6]$ aralığı için $P = \{0, 2, 5, 6\}$ bölüntüsü ile bu aralık $[0,2]$, $[2,5]$, $[5,6]$ şeklinde alt aralıklara ayrılır. Burada $\Delta x_1 = 2$, $\Delta x_2 = 3$, $\Delta x_3 = 1$ ve P bölüntüsünün normu 3 tür. ($\|P\| = 3$)

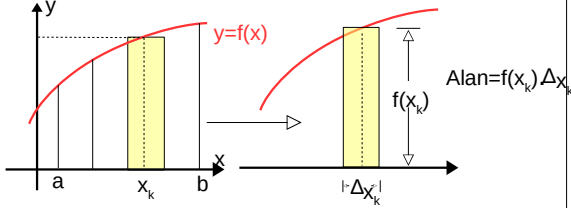
$[0,6]$ için, aralığı 3 eşit alt aralığa bölünerek düzgün bölüntüsünü oluşturmak istersek $P' = \{0, 2, 4, 6\}$ olacaktır. Benzer şekilde uzunluğu eşit n aralığa bölmek istersek, bölüntüsünün normu $\Delta x = \frac{6-0}{n} = \frac{6}{n}$ olacaktır.

İNTEGRAL -3

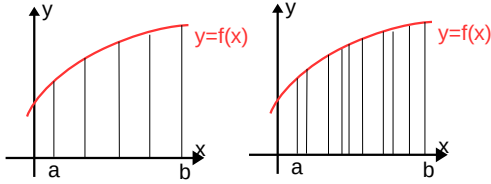
RIEMANN TOPLAMI

3.adım: Alanın hesaplanması

Şimdi her aralıktan bir reel sayı alalım ve k. aralıktan aldığımız bu sayıyı x_k ile gösterelim. İşte her alt aralıktan alınan bu x_k sayıları için $f(x_k)\Delta x_k$ sayılarının toplamına, yani $\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$ toplamına, Riemann toplamı (R_T) denir.



Riemann toplamının Δx_k sayıları ve P parçalanışına bağlı olduğu açıktır. Şekilleri inceleyiniz.



[[a,b] aralığının P parçalanışındaki aralıklar küçüldükçe, eğri altında kalan dikdörtgenlerin alanlarının toplamının f fonksiyonunun grafiği ile x eksenindeki alana yaklaştığını görürüz. Bu nedenle parçalanışın normu olan $\|P\|$ küçüldükçe (başka bir deyişle sifıra yaklaştıkça) bu parçalanışa ait Riemann toplamının yaklaştığı bir reel sayı değerinin, limitinin, olmasını bekleriz. (Fonksiyon sınırlı olmalı)
($A_T \leq R_T \leq Ü_T$) Alt aralıklar için, alt toplamda $f(x_k)$ en küçük, üst toplamda $f(x_k)$ en büyük değer

Not: Parçalanışın orta noktalarına göre yükseklikler alınıp dikdörtgenlerin alanları toplamı bulunursa Riemann Orta toplamı hesaplanmış olur.

Örnek...2 :

$f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = x$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aralığı 3 eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanmasına ait alt toplam kaç birimkaredir?

www.matbaz.com

Örnek...3 :

$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = x+2$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aralığı 4 eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanmasına üst toplam kaç birimkaredir?

Örnek...4 :

$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aralığı 3 eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanmasına ait alt toplamın orta toplama oranı kaçtır?

Hatırlatmalar: Toplam Sembölü

$$* \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad * \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad * \sum_{k=1}^n k = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

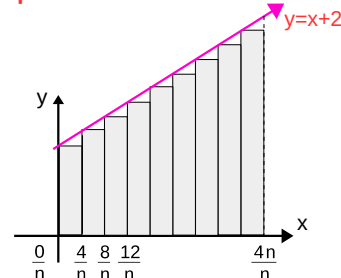
Örnek...5 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+2$ fonksiyonu ile $x=0$ doğrusu $x=4$ doğrusu ve x eksenine sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamıyla (bulunuz)

Çözüm

$[0,4]$ aralığının eşit bölünmesiyle her bir aralık $\frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ olarak elde edilir. Yükseklik olarak, alt aralıkların

Alt toplam



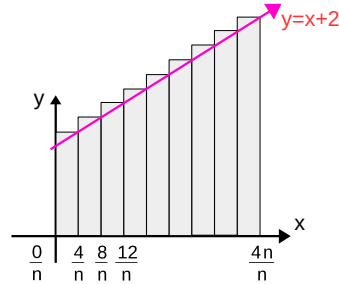
$$\frac{4}{n} \cdot \left(f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + f\left(\frac{8}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{4n-4}{n}\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(\left(\frac{0}{n}+2\right) + \left(\frac{4}{n}+2\right) + \left(\frac{8}{n}+2\right) + \dots + \left(\frac{4n-4}{n}+2\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(2n + \frac{2n-2}{n} \cdot n \right) = \frac{4}{n} \cdot (2n+2n-2) = \frac{4}{n} \cdot (4n-2) = \frac{16n-8}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n-8}{n} \right) = 16$$

Üst toplam



$$\frac{4}{n} \cdot \left(f\left(\frac{4}{n}\right) + f\left(\frac{8}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{4n-4}{n}\right) + f\left(\frac{4n}{n}\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(\left(\frac{4}{n}+2\right) + \left(\frac{8}{n}+2\right) + \dots + \left(\frac{4n}{n}+2\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(2n + \frac{2n+4}{n} \cdot n \right) = \frac{4}{n} \cdot (2n+2n+8) = \frac{4}{n} \cdot (4n+8) = \frac{16n+32}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n+32}{n} \right) = 16$$

Ve bu sonuçla birlikte $A_T \leq R_T \leq Ü_T$ olduğu için Riemann yöntemiyle alan 16 bulunur.

GÖSTERİMLER

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $P [a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanışı ve x'_k bu parçalanışa ait $[x_{k-1}, x_k]$ aralığından seçilen herhangi bir reel sayı olsun.

Eğer $\|P\| \rightarrow 0$ için $\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k = L$ olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa P parçalanışı ve x'_k sayılarının seçiminden bağımsız olarak f fonksiyonu $[a,b]$ arasında integrallenebilir ve $L \in \mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de f nin belirli integrali denir.

(bu aralıkta $y=f(x)$ fonksiyonu eğer negatif olmuyorsa bu limit değeri eğri ile x eksen arasında kalan alanı verir)

$\|P\| \rightarrow 0$ yerine $n \rightarrow \infty$ aynı şey olarak düşünülebilir. $\Delta x = dx$, ($\Delta x \rightarrow 0$)

Özetle $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k \right) = L \in \mathbb{R}$ oluyorsa bu limit değerine $y=f(x)$ fonksiyonunun a 'dan b ye belirli integrali der ve bunu $\int_a^b f(x) dx$ olarak yazarız. Burada a ve b sayılarına integralin alt ve üst limitleri denir

Kısaca $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k \right) = L = \int_a^b f(x) dx$ bu ifade düzgün parçalanışta ($n \rightarrow \infty$ için) $(\Delta x) \cdot \sum_{k=1}^n f(a+k \cdot \Delta x) = (\Delta x) \cdot \sum_{k=1}^n f(a+(k-1) \cdot \Delta x) = L = \int_a^b f(x) dx$ biçimlerinde de ifade edilebilir. (Sağ ve sol uç nokta yaklaşım yöntemleri)

$$\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k$$

↓ ↓ ↓

$$\int_a^b f(x) dx$$

Önceki örnek için $16 \leq R_T = \int_0^4 (x+2) dx \leq 16$

$\int_0^4 (x+2) dx = 16$ elde edilir

(Not İntegral hesabın temel teoremi ile belirli integralleri Riemann toplamlarının limiti yerine başka ve daha kısa bir yöntemle hesaplayacağız)

www.matbaz.com

Örnek...6 :

$\int_0^4 x dx$ belirli integralini bulunuz.

Çözüm
 $f(x)=x$ fonksiyonu $[0,4]$ aralığında sürekli ve sınırlı olduğundan belirli integrali vardır. $[0,4]$ aralığının düzgün bölüntüsünün boyu $\frac{4}{n}$ ve alt aralıklar $[0, \frac{4}{n}], [\frac{4}{n}, 2 \cdot \frac{4}{n}], \dots, [(n-1) \frac{4}{n}, \frac{4}{n} \cdot n]$ olur.

Riemann üst toplam için $f(x_k)$ değerleri $f(\frac{4}{n}), f(\frac{8}{n}), \dots, f(4)$ olacağından Riemann üst toplamı $\frac{4}{n} \cdot f(\frac{4}{n}) + \frac{4}{n} \cdot f(\frac{8}{n}) + \dots + \frac{4}{n} \cdot f(\frac{4}{n} \cdot n)$ olacaktır. Bu ise $\frac{4}{n} \cdot (\frac{4}{n} + \frac{8}{n} + \dots + \frac{4n}{n}) = \frac{4}{n} \cdot (\frac{4+8+\dots+4n}{n}) = \frac{4}{n} \cdot (\frac{4(1+2+\dots+n)}{n}) = \frac{4}{n} \cdot (\frac{2(n^2+2n)}{n}) = \frac{8n^2+16n}{n^2}$ ve n sınırsız olarak artarken (n sonsuza giderken limit alırsak) belirli integral 8 olarak elde edilir.

Aynı ifade bu aralıkta verilen (x) fonksiyon negatif olmadığından alana dönüştürülerek de yapabiliriz

Örnek...7 :

$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^2$ n değeri sonsuza giderken topladığımızda hangi belirli integrali elde ederiz?

Çözüm
 $b=1$ ve $a=0$ alınırsa ifade $(\frac{b-a}{n}) \cdot \sum_{k=1}^n f(a+k \cdot \Delta x) = \int_a^b f(x) dx$ olarak düşünüldüğünde $\int_0^1 x^2 dx$ elde edilir.

Örnek...8 :

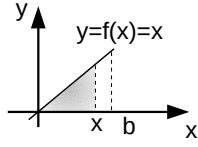
$\frac{3}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (2 + \frac{3k}{n})$ ifadesi n değeri sonsuza giderken topladığımızda hangi belirli integrali elde ederiz?

İNTEGRAL -3

RIEMANN TOPLAMI

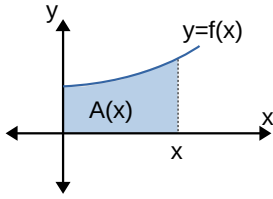
Örnek...9 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonunun grafiği veriliyor. Buna göre $x > 0$ için şekildeki taralı bölgenin alanını veren fonksiyonu bulalım ve bu fonksiyonun türevini şekildeki doğruyu temsil eden $y = f(x)=x$ fonksiyonu ile karşılaştıralım.

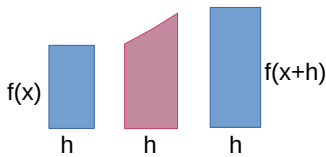
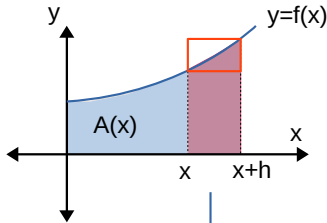


EĞRİ ALTINDA KALAN ALAN

$y=f(x)>0$ sürekli fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun. Bu fonksiyonun altında kalan alan x e bağlı $A(x)$ fonksiyonuyla ifade edilsin.



Şekli inceleyiniz



Burada x den $x+h$ a kadar olan alan $A(x+h)-A(x)$ olacaktır. Dikkatli incelenirse mor bölgenin alanı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$h \cdot f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq [f(x+h)] \cdot h$$

$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x+h) \quad h \rightarrow 0 \text{ içinse}$$

$A'(x)=f(x)$ eşitliği elde edilir. Bu ifadenin integrali ise bir eğri ve altındaki alanın ilişkisini göstermektedir.

İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ: İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ I

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ise}$$

$$F'(x) = \frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x) \text{ yani sürekli}$$

her fonksiyon başka bir fonksiyonun türevidir. Başka bir deyişle türev ve integral işlemleri birbirlerinin tersi işlemlerdir. $(F(x)+c)'=f(x)$ olduğunun da farkına varınız

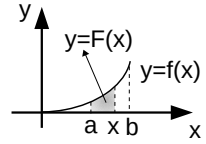
Örnek...10 :

Yandaki grafikte taralı bölgenin alanını veren $F(x)$ fonksiyonu

$F(x) = 2x^4 + 5x^3 + 1$ olarak tanımlanmıştır.

İntegralin I.

temel teoreminden yararlanarak $f(x)$ fonksiyonunu bulmak istersek $F'(x)=f(x)$ olacağından $f(x)=8x^3+15x^2$ olur.



İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ II

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$\frac{d}{dx}(F(x))=f(x) \text{ ise } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ olur.}$$

Yani $\int_a^b f(x) dx$ ifadesini hesaplamak için

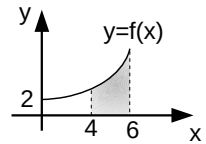
Riemann toplamı ile sonuca gitmek yerine, $f(x)$ fonksiyonunun ilkel olan $F(x)$ gibi bir fonksiyonda integralin sınırlarını yazar oluşun farkı (F' de üst sınır değerinden alt sınır değerini çıkararak) cevap olarak hesaplarız verir.

Örnek...11 :

Yandaki grafikte taralı bölgenin alanını veren $F(x)$ fonksiyonu

$F(x) = x^3 + 2x + 1$ olarak tanımlanmıştır.

Buna göre $\int_4^6 f(x) dx = F(6) - F(4) = 156 \text{ br}^2$ olarak elde edilir.



https://tr.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

İNTEGRAL-4

BELİRLİ İNTEGRAL

BELİRLİ İNTEGRAL KURALLARI

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$5. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c < b$$

$$6. (b-a) \cdot \min(f(x)) < \int_a^b f(x)dx < (b-a) \cdot \max(f(x))$$

$$7. f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli bir fonksiyon ve } \frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \text{ ise } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ olur.}$$

Örnek...1 :

$$\int_2^3 f(x)dx = 4 \text{ ve } \int_3^7 f(x)dx = 9 \text{ ise } \int_2^7 f(x)dx = ?$$

Örnek...2 :

$$\text{Uygun koşullarda } \int_2^5 f(x)dx = 4 \text{ ve } \int_4^7 f(x)dx = 9 \text{ ve } \int_2^7 f(x)dx = 21 \text{ ise } \int_4^5 f(x)dx = ?$$

Örnek...3 :

$$\int_1^2 xdx = ?$$

Örnek...4 :

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 5x^2 - 7x + 4)dx = ?$$

Örnek...5 :

$$\int_0^2 \left(3x^2 + \frac{x}{3}\right)dx = ?$$

UYARI

Değişken değiştirme yapıldığında yeni değişkene göre sınırlar tekrar hesaplanırsa eski değişkene dönülmeden integral hesaplanabilir

Örnek...6 :

$$\int_2^3 (x-2)^2 dx = ?$$

Örnek...7 :

$$\int_0^1 (x^2 + 5x + 1)^2 (2x + 5) dx = ?$$

İNTEGRAL-4

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...8 :

$$\int_{-2}^2 x^5 + x^3 dx = ?$$

Örnek...9 :

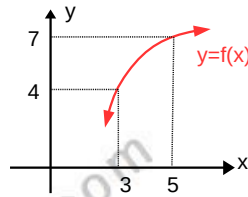
$$\int_{-3}^3 \frac{x^{15}}{1+x^4} dx = ?$$

Örnek...10 :

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx = ?$$

Örnek...11 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre $\int_3^5 (f(x) + x \cdot f'(x)) dx = ?$



Örnek...12 :

$$\int_2^3 f(x) dx = 5 \text{ ise } \int_2^3 (7-f(x)) dx = ?$$

Örnek...13 :

$$\int_0^2 f(4x) dx = 60 \text{ ise } \int_0^8 (1-f(x)) dx = ?$$

Örnek...14 :

$\int_1^{256} \frac{\sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ integralinde $x=u^{12}$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız ($u>0$)

İNTEGRAL-4

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...15 :

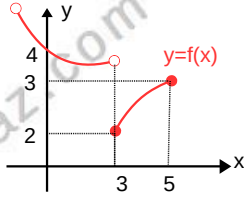
$y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda türevli ve $x=2$ noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45° lik açı yapıyorsa ve $x=3$ ekstremum noktalarından birinin apisi ise

$$\int_2^3 \frac{x \cdot f''(x) - f'(x)}{x^2} dx = ?$$

Örnek...16 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir

$$\int_3^5 f(x) + x \cdot f'(x) dx = ?$$



Örnek...17 :

$\int_0^t (x^2 - 4x - 5) dx$ integralinin alacağı sonuç en küçük değer kaçtır?

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

İntegrandında parçalı fonksiyon veya mutlak değerli fonksiyon içeren integraller integralin alındığı sınırlar içerisinde kritik nokta içeriyorsa göre parçalanarak integralleri alınır.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığındaki bulunan sonlu sayıdaki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları için süreksiz ise bu noktalara göre integral parçalanır.

$$\text{Yani } \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx$$

Bu parçalamayı genelde parçalı fonksiyonda veya mutlak değerlerin kritik noktasında ihtiyaç duyarsak yaparız

Örnek...18 :

$$f(x) = \begin{cases} (e)^{x^2} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-4}^{-2} f(x) dx$$

Örnek...19 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x^3 & 2 < x < 3 \\ x+1 & x \geq 3 \end{cases} \text{ fonksiyonu için } \int_0^5 f(x) dx$$

Örnek...20 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ 3x^2 & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-1}^3 f(x) dx$$

İNTEGRAL-4

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...21 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-3}^1 f(x+2) dx$$

Örnek...22 :

$$\int_0^4 |x+2| dx$$

Örnek...23 :

$$\int_0^2 x^3 |x-1| dx$$

Örnek...24 :

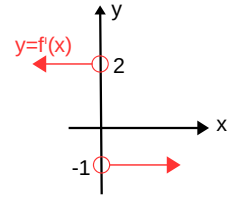
$$\int_{-1}^1 (2x-3)|x| dx$$

Örnek...25 :

$$\int_0^1 \frac{x^2-4}{|x-2|} dx$$

Örnek...26 :

Reel sayılarda sürekli olan f fonksiyonunun türevinin grafiği veriliyor. $f(3)-f(2)=?$



İNTEGRAL-4

BELİRLİ İNTEGRAL

DEĞERLENDİRME

1) $\int_2^3 f(x)dx=10$ ve $\int_2^3 g(x)dx=8$ ise
 $\left(\int_2^3 (4.f(x)+3g(x))dx\right) \cdot \left(\int_2^3 (5.f(x)-4g(x))dx\right)$

2) $\int_{-1}^{15} f(x)dx=10$, ve $\int_{-1}^{15} g(x)dx=8$ ise
 $\left(\int_{-1}^{15} f(x)+g(x)dx\right) \cdot \left(\int_{-1}^{15} f(x)-g(x)dx\right)$

3) $\int_2^3 f(x)dx=-3$ ve $\int_3^7 f(x)dx=5$ ise $\int_7^2 f(x)dx=?$

4) $\int_1^2 f(x)dx=6$ ve $\int_1^2 (5-3.f(x))dx=?$

5) $\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^2 \frac{x^n}{n!}\right)dx=?$

6) $\int_{-3}^{-4} \frac{1}{(x+5)^4}dx=?$

7) $\int_{-2}^2 (x^{15}+\sin^9 x)dx=?$

8) $\int_0^{12} f\left(\frac{x}{3}\right)dx=36$ ise $\int_0^2 (x+3-4.f(2x))dx=?$

İNTEGRAL-4

BELİRLİ İNTEGRAL

9) $\int_1^4 f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 3$ ise $\int_{\sqrt{2}}^2 5x \cdot f\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = ?$

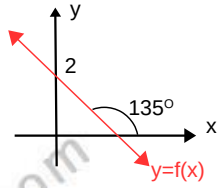
10) $\int_1^{64} \left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ integralinde $x=u^6$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız ($u>0$)

11) $y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda türevli ve $x=1$ noktasındaki teğeti x eksenine paralel ve $x=5$ deki teğeti $y-3x+2=0$ doğrusuna dikse =?
 $\int_1^5 \frac{f''(x)}{x} dx + \int_5^1 \frac{f'(x)}{x^2} dx$

12) $y=f(x)$ fonksiyonu n grafiği

şekildeki gibidir

$\int_3^5 f(x) + x \cdot f'(x) dx$ integralinin değerini bulunuz



13) $f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 1 \\ x & 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 & x > 3 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_0^4 f(x) dx$

14) $f(x) = \begin{cases} 1+2x & x \geq 4 \\ 3x & x < 4 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_{-1}^3 f(x+3) dx$

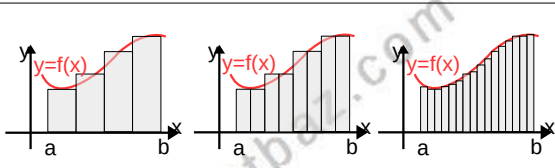
15) $\int_1^4 |x-2| dx$

16) $\int_{-1}^3 x \cdot |x-2| dx$

İNTEGRAL-5

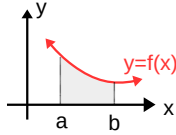
ALAN HESABI

İNTEGRAL İLE ALAN HESABI



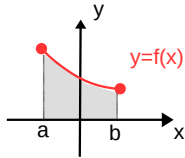
Şekilde $y=f(x)$ eğrisiyle x eksenine altında kalan alanı bulmak için eğrinin altında kalan bölgeyi dikdörtgenlere ayırır ve bu alanları toplayarak bir Riemann toplamı elde ederiz. Elde edilen Riemann toplamına integral hesabının temel teoremini uygulayarak aşağıdaki sonuçları çıkarırız

ALAN HESABI



$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekliliği f fonksiyonu ile $x=a$, $x=b$ ve Ox eksenine arasında kalan bölgenin alanı $\int_a^b |f(x)| dx$ ile hesaplanır.

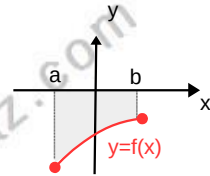
Taralı alan $\int_a^b f(x) dx$



UYARI 1

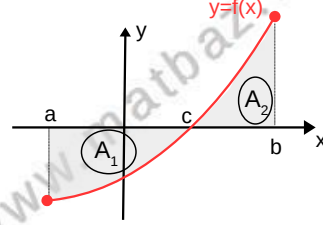
Not $f(x) < 0$ ise

Taralı alan $-\int_a^b f(x) dx$



UYARI 2

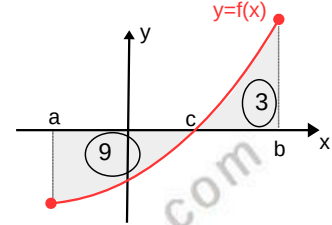
$[a,b]$ aralığında $f(x)$ işaret değiştiriyorsa, fonksiyon parçalara ayrılır



Taralı toplam alan $= A_1 + A_2$
 $= \int_a^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

UYARI 3

Şekildeki taralı bölgelerin alanları verilmiştir



Soru 1 $\int_a^b f(x) dx = ?$

İstenen alanların işaretli (cebirel) toplamı olup cevap $-9+3=-6$ olur

Soru 2 $[a,b]$ aralığında Ox eksenine ve $y=f(x)$ eğrisiyle sınırlı alan kaç br^2 dir?

İstenen toplam alanlar olup integrale ifadesi $\int_a^b |f(x)| dx$ ve eşiti $9+3=12$ olur

Alan sorularını çözmek için uygun şekli çizeriz, gerekirse integralleri parçalar ve uygun aralıklarda integralleri hesaplarız

Örnek...1 :

$y=x+3$ doğrusu $x=-1$, $x=2$ doğruları ve x eksenine arasında kalan alan kaç br^2 dir?

İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

Örnek...2 :

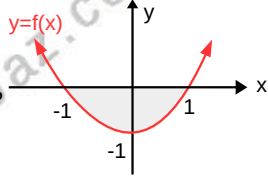
$y = x^2$ parabolü, $y = 0$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı kapalı bölgenin alanı kaç br^2 ?

Örnek...3 :

$y = 3 - \frac{x^2}{3}$ eğrisi ile ox ekseninde kalan kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

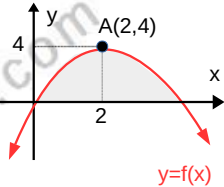
Örnek...4 :

Şekildeki $y=f(x)$ parabolü ve x ekseninde kalan taralı alan kaç birim karedir?



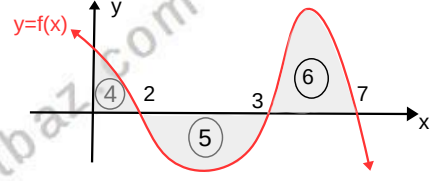
Örnek...5 :

Şekildeki tepe noktası A olan $y=f(x)$ parabolü ile x ekseninde kalan alan kaç birim karedir?



Örnek...6 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $\int_0^2 x \cdot f(x^2+3) dx = ?$



Örnek...7 :

$y = 9x - x^2$ eğrisi $x = -1$ ve $x=1$ doğruları ve ox ekseninde kalan bölgenin alanı kaç br^2 dir.

Örnek...8 :

Teorem : $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$y = x^2$, $y = \frac{8}{x}$ ve $x=5$ doğrusu ve x ekseninde kalan alanı hesaplayınız

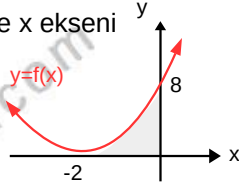
İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

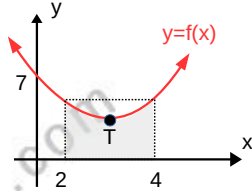
DEĞERLENDİRME 1

- 1) $y=x+1$ doğrusu $x=0$, $x=3$ doğruları ve x ekseninde kalan alan kaç br² dir?

- 2) Şekildeki $y=f(x)$ parabolü ve x ekseninde kalan alan kaç birim karedir?

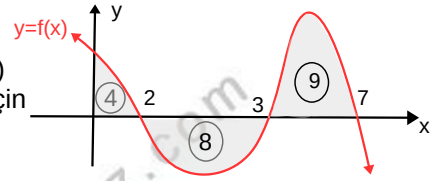


- 3) Şekildeki tepe noktası $T(r,6)$ olan $y=f(x)$ parabolü ile $x=2$ ve $x=4$ ve x ekseninde kalan alan kaç birim karedir?



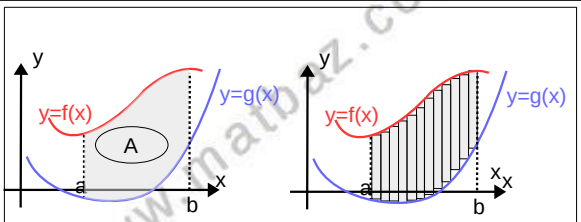
- 4) $y = 4 - x^2$ eğrisi $x = 1$ ve $x=3$ doğruları ve Ox ekseninde kalan bölgenin alanı kaç br² dir

- 5) Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için $\int_0^7 f(x) dx$

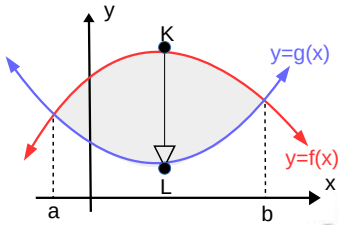


- 6) $y=x^2-2x$ parabolü $x=1$ ve $x=5$ doğruları ve x ekseninde kalan alanı hesaplayınız.

İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN



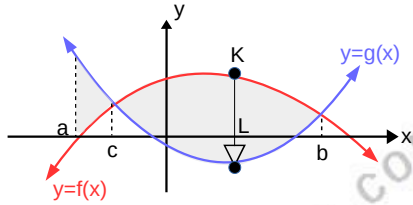
İki eğri arası alan bulunurken grafikler arasındaki alan yine dikdörtgenlere bölünerek alan Riemann toplamına dönüştürülür.



Genel olarak eğriler arasındaki alanı bulmak için grafikler çizildikten sonra Oy eksenine paralel KL şeridi çizilir. Bu şeridi kendisine paralel olarak kaydırarak bölgeyi taradığımızda üst ve hep $y = f(x)$ eğrisi üzerinde alt ucu da hep $g(x)$ eğrisi üzerinde değişmesi gerekir. Şekli inceleyiniz

Bu durumda alan $A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ olur.

Aksi takdirde integrali parçalamak gerekir



Taralı alanlar toplamı

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx$$

Örnek...9 :

$y = x^2$ eğrisi ile $y = x + 12$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

Örnek...10 :

$y = x^2 - 14$ ve $y = 4 - x^2$ parabolleri arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir

Örnek...11 :

$y = x^2$ ve $y = x^4$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

Örnek...12 :

$y=x^3$ ve bu eğriye $x=1$ de çizilen teğeti arasında kalan bölgenin alanını

Örnek...13 :

$y=\sqrt{x}$ ve $y=x-2$ doğrusu ve x eksenini arasında kalan alanı bulunuz.

DEĞERLENDİRME

1) $y=x^2$ vey $y=2x+8$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

2) $y=x^2$ ve $y=4x-x^2$ arasında kalan alanı bulunuz.

3) $y=x^3$ vey $y=x^4$ arasında kalan alanı bulunuz.

4) $f(x)=x^2$ ve $g(x)=(x-2)^2$ ile x eksenini arasında sınırlı bölgenin alanı kaç br^2 dir.

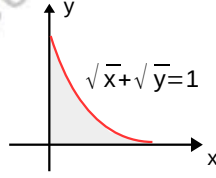
5) $y=-x^2+x+6$ ile $y=x+2$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

6) $y=x^3$ fonksiyonu $x=1$ noktasındaki normali ve $x=0$ doğrusu ile sınırlanmış bölgenin alanı kaç birim karedir?

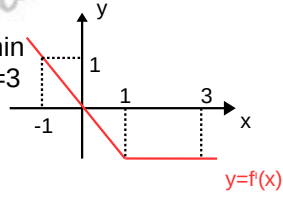
İNTEGRAL-5

ALAN HESABI

- 7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ bağıntısıyla birinci bölgede sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

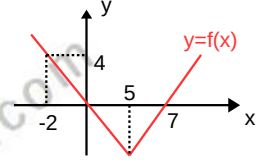


- 8) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. $f(0)=3$ ise $f(3)$ kaçtır?



- 9) $f(x)=\sqrt{x-2}$, $g(x)=x^2+2$ fonksiyonları ve $x=18$ ile $y=18$ doğruları ve eksenler arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

- 10) Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $\int_{-2}^7 |f'(x)| dx$ kaçtır?



- 11) $\int_0^a (2x^2 - 6x) dx$ integralinin alacağı sayısal sonuç en az kaçtır?

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

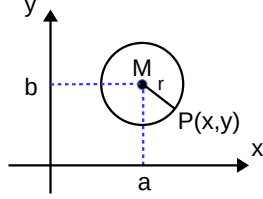
TANIM

Bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri **düzlemde çember** belirtir.

ÇEMBERİN STANDART VE VEKTÖREL DENKLEMİ

$M(a,b)$ ve $P(x,y)$ noktaları arasındaki uzaklık kullanarak çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ olarak elde edilir.

$\|\overline{MP}\| = r$ ise M merkezli ve r yarıçaplı çemberin vektörel denklemidir.



Örnek...1 :

$M(3,5)$ ve yarıçapı 4 birim olan çemberin standart denklemini yazınız.

Örnek...2 :

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

MERKEZİL ÇEMBER :

Merkezi orijinde olan çemberlere denir. Yani $M(0,0)$ ve yarıçapı r ise çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ biçimindedir.

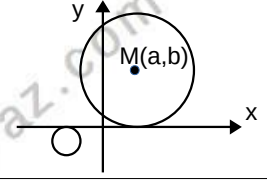
Örnek...3 :

$(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 40$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

EKSENLERE TEĞET ÇEMBERLER :

x eksenine teğet çemberler :

$|b| = r$ dir.



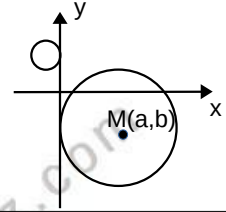
Örnek...4 :

$M(4,-6)$ merkezli ve x eksenine teğet çemberin denklemini yazınız

Y EKSENİNE TEĞET ÇEMBERLER :

y eksenine teğet çemberler :

$|a| = r$ dir.



Örnek...5 :

$M(4,-6)$ merkezli ve y eksenine teğet çemberin denklemini yazınız?

UYARI

Bir çember her iki eksene teğet ise merkezi 1. veya 2. açıortay doğrusu üzerindedir. (Bu önermenin karşıtı doğru değildir.)

Her iki eksene teğet çemberde $M(a,b)$ merkez ise $|b| = |a| = r$ dir.

Örnek...6 :

$(x + 5)^2 + (y - p)^2 = r$ çemberi her iki eksene de teğetse p r en az kaçtır?

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...7 :

Merkezi $3y+x=4$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene teğet olan çemberlerin merkezlerini ve yarıçaplarını bulunuz? Bu çemberler arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

Örnek...8 :

A(-2,3) noktasından geçen ve iki eksene de teğet olan çemberin yarıçapı kaç olabilir?

Örnek...9 :

$3x-4y=0$ ile $4y-3x+15=0$ doğrularına teğet çemberin ve merkezi $y=3$ doğrusu üzerinde olan çemberin denklemi nedir?

ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

$M(a, b)$ merkezli ve r yarıçaplı çemberin denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ idi.

Bu denklemi açıp düzenlersek

$$x^2 + y^2 - 2.a.x - 2.b.y + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \text{ olur.}$$

$$- 2.a=A \quad -2.b=B \text{ ve } a^2 + b^2 - r^2 = C \text{ diyelim.}$$

$$x^2 + y^2 + A.x + B.y + C = 0$$

Buradan şu eşitlikleri elde ederiz :

$$M(a, b) = M\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4.C} \quad \Delta = A^2 + B^2 - 4.C \text{ (Delta)}$$

Uyarı: Çember denkleminde yukarıdaki bağıntıların kullanılabilmesi için

1. x^2 ve y^2 li terimlerin katsayısı 1 olmalı
2. denkleminde $x.y$ li terim bulunmamalı
3. $\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$ olmalıdır.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C > 0$ ise bir çember belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C = 0$ ise bir nokta belirtir.

$\Delta = A^2 + B^2 - 4C < 0$ ise çember belirtmez.

Bunu sanal çember belirtir şeklinde de söyleriz.

Örnek...10 :

$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 5 = 0$ çemberinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek...11 :

$3x^2 + 3y^2 + 12x - 8y - 5 = 0$ çemberinin merkezini bulunuz.

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...12 :

$(2m-1)x^2 + (m+1)y^2 - (n-6)x.y + 6nx - n - 9 = 0$ denkleminin bir çember belirttiğini ise bu çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek...13 :

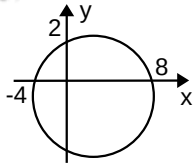
$(m-2)x^2 + (4-m)y^2 + (n-5)xy + 2mx - ny - mn = 0$ denkleminin bir çember belirttiğine göre merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Örnek...14 :

$x^2 + y^2 - 8x + 9y - 20 = 0$ çemberinin x-ekseninden ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

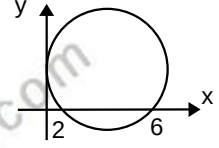
Örnek...15 :

Şekilde verilen çemberin denklemini yazınız.



Örnek...16 :

Şekilde verilen y-eksenine teğet çemberin denklemini yazınız.

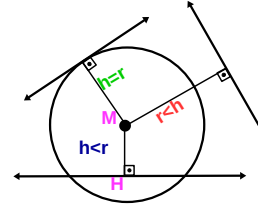


Örnek...17 :

A(0,5) B(-12,0) ve K(0,0) noktalarından geçen çemberin denklemini yazınız.

www.matbaz.com

ÇEMBER İLE DOĞRUNUN DURUMLARI :



Çember ve doğrunun kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezin doğruya uzaklığı ile yarıçap karşılaştırılır:

- Durum 1) $|MH| > r$ doğru çemberi kesmez
Durum 2) $|MH| = r$ doğru çember teğettir
Durum 3) $|MH| < r$ doğru çember iki noktada kesişir.

NOT

Çember ve doğrunun kesim noktalarını bulmak için ortak çözüm yaparız.

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...18 :

Analitik düzlemde $(x+3)^2+y^2=5$ çemberi ile $y-2x=p$ doğrusu teğet ise p nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

Örnek...19 :

Analitik düzlemde $x^2+y^2=r^2$ çemberi ile $3x-4y=10$ doğrusu teğet ise r kaçtır?

Örnek...20 :

$(x-3)^2+(y+1)^2=16$ çemberi ile $4x-3y+k=0$ doğrusunun iki noktada kesişmesi için k ne olmalıdır?

Örnek...21 :

$(x+1)^2+(y-1)^2=18$ çemberi ile $y=x-m$ doğrusunun kesişmemesi için m ne olmalıdır?

Örnek...22 :

$x^2-2x+y^2-6y-8=0$ çemberinin x ekseninde ayırdığı kirişin uzunluğu kaç birimdir?

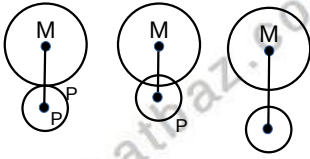
Örnek...23 :

$x^2-2x+y^2-4y-11=0$ çemberinin $y=x+1$ doğrusuyla kesim noktaları A ve B olsun. $|AB|$ kaç birimdir?

Örnek...24 :

Analitik düzlemde $x^2+y^2=6$ merkezli çemberi ile $y=3x-1$ doğrusunun kesim noktalarının apsisi toplamı kaçtır?

İKİ ÇEMBERİN DURUMLARI



İki çemberin kesişip kesişmediğine karar verilirken merkezler arası doğru ile yarıçap toplamı veya farkı karşılaştırılır.

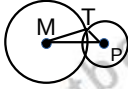
durum 1 $|MP|=r_m+r_p$ çemberler dıştan teğet

durum 2 $|MP|=|r_m-r_p|$ çemberler içten teğet

durum 3 $|r_m-r_p|<|MP|<r_m+r_p$ çemberler iki noktada kesişir

durum 3 $|MP|<|r_m-r_p|$ veya $|MP|>r_m+r_p$ çemberler kesişmezler

Dik kesişen çemberler



Kesim noktalarındaki teğetleri dik olan çemberlere dik kesişiyorlar denir.

Yukarıdaki şekilde merkezler $m(\widehat{MTP})=90^\circ$ ise çemberler dik kesişmiştir.

Örnek...25 :

$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 225$ ve

$(x - 7)^2 + (y - k)^2 = 4$

çemberleri içten teğet ise k kaç olabilir?

Örnek...26 :

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ ve

$(x + 1)^2 + (y - k)^2 = 49$

çemberleri dıştan teğet ise k değerleri çarpımı kaç olabilir?

Örnek...27 :

$(x - 3)^2 + y^2 = 16$ ve

$(x + 1)^2 + (y - m)^2 = 9$

çemberleri dik kesiştiğine göre m değerleri toplamı kaç olabilir?

ÇEMBER İLE NOKTANIN DURUMLARI

O(a,b) merkezli ve r yarıçaplı $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberi ile çember ile aynı düzlemde bulunan P(x₀, y₀) noktası için $|OP|^2 - r^2$ değerine P noktasının bu çembere göre kuvveti denir.

$|OP|^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$ olacağından bu hesaplama çember denklemi F(x,y)=0 biçimine getirildikten sonra P noktasının koordinatları F(x,y) kısmında yazılarak hesaplanmalıdır.

Durum 1 $F(x_0,y_0)=0$ P noktası çemberin üzerindedir

Durum 2 $F(x_0,y_0)>0$ P noktası çemberin dışındadır

Durum 3 $F(x_0,y_0)<0$ P noktası çemberin içindedir

Not 1: $F(x_0,y_0)>0$ ise bu hesaplama sonucu bulunan pozitif sayı çembere P noktasından çizilen teğet uzunluğunun karesidir.

Not 2: Negatif kuvvetin mutlak değeri ise bu noktada ile iki parçaya ayrılan giriş parçalarının sabit olan çarpım değeridir.

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...28 :

P(6, 4) noktasından $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 20 = 0$ çemberine göre kuvvetini bulup kuvveti yorumlayınız.

Örnek...29 :

P(2, -3) noktasından $x^2 + y^2 - 3x - 5y + k = 0$ çemberine çizilen teğetin değme noktası T ve IPTİ = 7 ise k = ?

Örnek...30 :

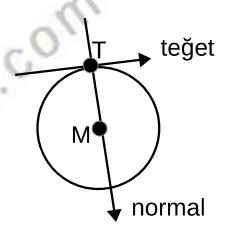
A(-1, 2) noktasından geçen bir doğru $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 12$ çemberini K ve L noktalarında kesiyor. |AK|. |AL| çarpımı kaçtır?

Örnek...31 :

$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 41$ çemberinin A(1,2) noktasından geçen en kısa kirişinin uzunluğu kaç birimdir?

TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ :

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $T(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 = r^2$ dir.



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberine üzerindeki $T(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = r^2$ dir. Bu bağıntıları kullanmak yerine iki noktası bilinen doğru denklemi, diklik koşulu ve standart doğru denklemi kullanarak teğet ve normal denklemlerini bulabiliriz

Örnek...32 :

$(x + 3)^2 + y^2 = 34$ çemberine A(2,-3) noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

Örnek...33 :

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ çemberinin A(1,1) noktasından çizilen teğetin ve normalin denklemleri nedir?

ANALİTİK GEOMETRİ

ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

Örnek...34 :

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ çemberinin $A(-2, -4)$ noktasından geçen teğetinin denklemini bulunuz?

DEĞERLENDİRME

1) $(3x - 8)^2 + (3y + 1)^2 = 36$ çemberinin merkez ve yarıçapını bulunuz.

2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$ çemberi üzerindeki bir noktanın $A(-4, 5)$ noktasına uzaklığı en az kaç birimdir?

3) $A(2, -1)$ noktası $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$ çemberinin neresindedir?

4) $B(-2, 1)$ noktası $x^2 + y^2 - (m+1).x + 4y + 1 = 0$ çemberinin dışında olduğuna göre m ' nin alacağı en küçük tam sayı değeri kaçtır?

5) $A(3, 12)$ noktasına uzaklığı $B(-5, 1)$ noktasına uzaklığının yarısı olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

ANALİTİK GEOMETRİ

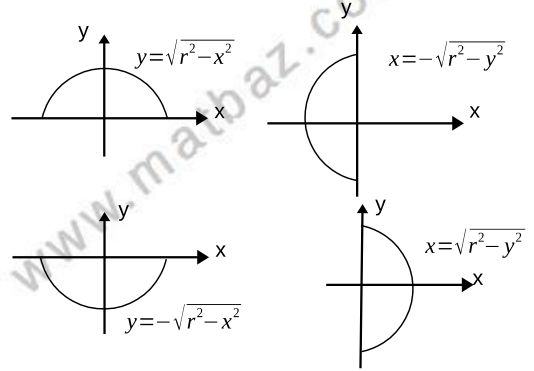
ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

- 6) $A(4, 2)$ noktasının $2x - m.y + 3y + 8 = 0$ doğrularına göre simetrilerinin geometrik yerini bulunuz.

- 7) Verilen bir A noktasının verilen bir S noktasından geçen doğrulara göre simetrikleri ne belirtir?

- 8) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 40$ çemberi içindeki $P(2, -2)$ noktasından geçen kirişlerin orta noktalarının geometrik yer denklemini yazınız.

- 9) Standart çember denklemini kullanarak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz



Yukarıda verilenlere göre aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$

b) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1-x^2} - x) dx$