

Çarpanlar ve Asal Çarpanlar

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Pozitif Tam Sayıların Pozitif Çarpanlarını Bulma
- √ Pozitif Tam Sayıların Asal Çarpanlarını Bulma
- √ Pozitif Tam Sayıları Üslü İfade veya Üslü İfadelerin Çarpımı Şeklinde Yazma

Bir doğal sayının çarpanlarını bulmayı 6. sınıfta çarpanlar ve katlar konusunda öğrenmiştik. Asal sayılar ve bir doğal sayının asal çarpanlarını bulmayı da yine 6. sınıfta asal sayılar ve asal çarpanlar konusunda öğrenmiştik. **8. sınıf çarpanlar ve katlar** konusunun ilk kazanımı olan bu konuda ise bunları hatırlayıp, pozitif tam sayıları üslü ifade veya üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazmayı öğreneceğiz.

BİR DOĞAL SAYININ ÇARPANLARI (BÖLENLERİ)

Her doğal sayı iki doğal sayının çarpımı olarak yazılabilir. Bu iki sayıdan her birine o sayının **çarpanı** denir. Bu çarpanlar aynı zamanda o sayıyı kalansız böldüğü için **bir doğal sayının çarpanları aynı zamanda bölenleridir**.

Çarpanları yazarken 1'den başlayarak son yazdığımız çarpanlara eşit olana kadar sırayla gitmek işlemlerinizi kolaylaştırır. Ayrıca **bölünebilme kuralları** konusunu tekrar ederseniz bu konuda ve sonraki konularda faydasını görürsünüz.

ÖRNEK: 24 sayısının pozitif çarpanlarını (kalansız bölenlerini) bulalım.

24'ü iki sayının çarpımı şeklinde yazalım. Aşağıdaki gibi sonuçlar elde ederiz.

$$24 = 1 \times 24$$

$$24 = 2 \times 12$$

$$24 = 3 \times 8$$

$$24 = 4 \times 6$$

~~24 = 6 \times 4~~ Bir üstte aynısını yazmıştık, bu yüzden işlemimiz bitti.

Buna göre yukarıda yazdığımız sayılar 24'ün çarpanlarıdır. Bu çarpanlar aynı zamanda 24'ün kalansız bölenleridir.

24'ün Pozitif Çarpanları / Bölenleri = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

ÖRNEK: 60 sayısının pozitif çarpanlarını bulalım.

60'ı iki sayının çarpımı şeklinde yazarsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$60 = 1 \times 60$$

$$60 = 2 \times 30$$

$$60 = 3 \times 20$$

$$60 = 4 \times 15$$

$$60 = 5 \times 12$$

$$60 = 6 \times 10$$

60'ın Pozitif Çarpanları (Bölenleri) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ve 60'tır.

ASAL SAYILAR

Pozitif çarpanları (bölenleri) sadece 1 ve kendisi olan 1'den büyük sayılara asal sayılar denir.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ... sayıları birer asal sayıdır.

ÖRNEK: 91 asal sayı mıdır? 91'in çarpanlarını bulalım.

$$91 = 1 \times 91$$

$$91 = 7 \times 13$$

Görüldüğü gibi 91 sayısının çarpanları arasında 1 ve kendisinden başka sayılar da vardır. Bu yüzden 91 sayısı asal sayı değildir.

1 asal sayı değildir, en küçük asal sayı 2'dir

2'den başka çift asal sayı yoktur. (Çünkü hepsi 2'ye de bölünür.)

1'den 200'e kadar olan asal sayılar için tıklayınız.

ASAL ÇARPANLAR

Bir sayının çarpanlarından asal olanlarına bu sayının **asal çarpanları** denir.

ÖRNEK: 75 sayısının asal çarpanlarını bulalım.

75 sayısının tüm çarpanlarını yukarıda öğrendiğimiz yöntemle 1, 3, 5, 15, 25, 75 olarak buluruz.

Bu çarpanlar arasında asal sayı olanlar 3 ve 5 olduğu için 75'in asal çarpanları 3 ve 5'tir.

Sayıların asal çarpanlarını bulmayı ve bir sayıyı asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazmayı aşağıdaki iki yöntemle yapabiliriz.

1) ÇARPAN AĞACI

Çarpan ağacı nedir, nasıl yapılır görelim.

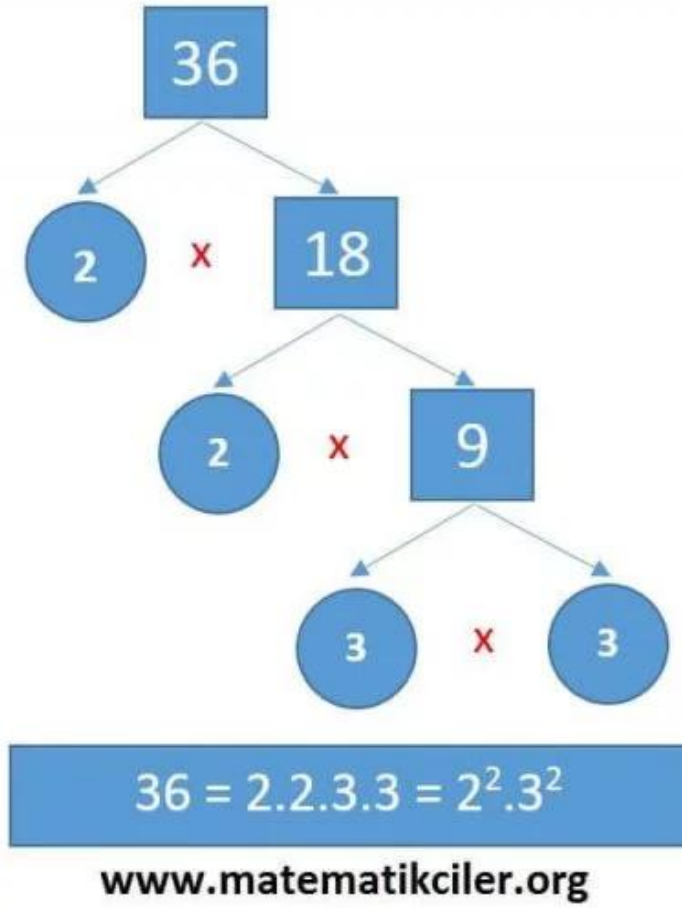
Bir sayıyı iki sayının çarpımı şeklinde yazarız (en küçük asal sayıdan başlayabiliriz). Daha sonra bulduğumuz sayıları asal sayı olana kadar bu işleme devam ederiz. Oluşan dalların uçlarındaki sayılar sayımızın asal çarpanlarıdır

Çarpan ağacında dalların uçlarındaki asal sayıların çarpımı, çarpanlarına ayırdığımız sayıyı verir. Bir sayıyı bu şekilde yazarsak asal çarpanlarının tabanlarda bulunduğu üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazmış oluruz.

ÖRNEK: 36 sayısını çarpan ağacı kullanarak asal çarpanlarına ayıralım.

36 sayısının çarpanları : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36'dır. Bunu bir sayının çarpanları konumuzda öğrenmiştik. Bu sayılardan asal sayı olanları asal çarpanlarımızdır.

36 sayısının asal çarpanları: 2 ve 3'tür. Şimdi bunu çarpan ağacı ile bulalım:

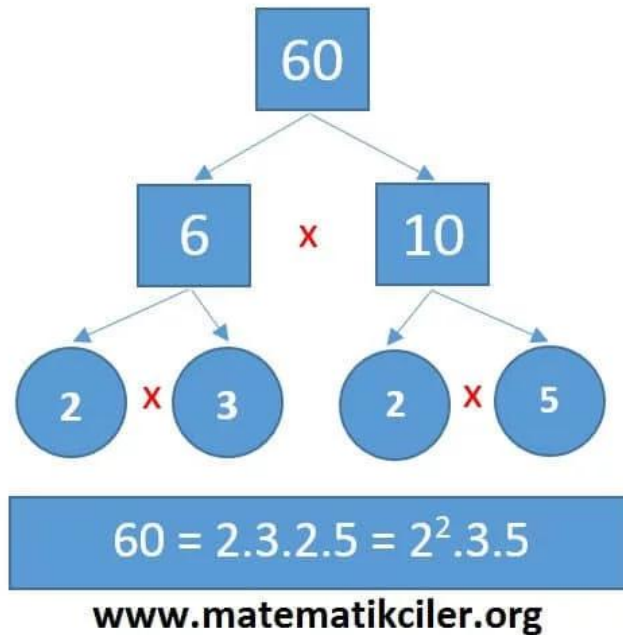


36 sayısının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmış hali $36 = 2^2 \cdot 3^2$ 'dir.

ÖRNEK: 60 sayısını çarpan ağacı kullanarak asal çarpanlarına ayıralım.

60 sayısının çarpanları : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ve 60'tır.

60 sayısının asal çarpanları: 2, 3 ve 5'tir. Şimdi bunu çarpan ağacı ile bulalım:



60 sayısının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmış hali $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ 'tir.

SORU: Aşağıdaki çarpan ağaçlarında verilmeyen A, B ve C sayılarını bulunuz.

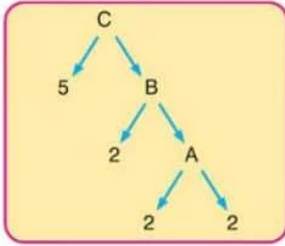
ÇÖZÜM: Birinci çarpan ağacı örneğini birlikte yapalım, kalan çarpan ağacı örnekleri sizin olsun.

Çarpan ağacında her sayı altındaki sayıların çarpımına eşittir. Alttan başlayarak

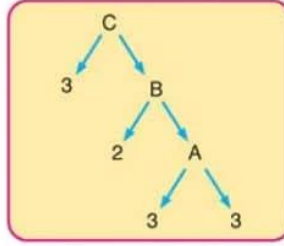
$$A = 2 \cdot 2 = 4$$

$$B = 2 \cdot 4 = 8$$

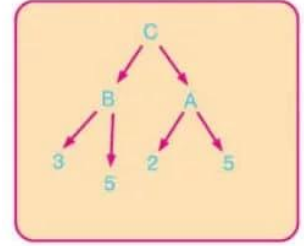
$$C = 5 \cdot 8 = 40 \text{ bulunur.}$$



$$\begin{aligned} A &= 2 \times 2 = 4 \\ B &= 2 \times 4 = 8 \\ C &= 5 \times 8 = 40 \end{aligned}$$



www.matematikciler.org



2) BÖLEN LİSTESİ (Asal Çarpanlar Algoritması)

Bölen listesi yani diğer adıyla asal çarpanlar algoritması nedir, nasıl yapılır görelim.

Sayımızın yanına dikey bir çizgi çekeriz ve en küçük asal sayıdan başlayarak ve tam bölünmediğinde bir sonraki asal sayıya geçerek bölme işlemi yaparız. 1'i elde edince işlemimiz sona erer. Çizginin sağında kalan sayılar sayımızın asal çarpanlarıdır.

Bölen listesinde çizginin sağındaki asal sayıların çarpımı, çarpanlarına ayırdığımız sayıyı verir. Bir sayıyı bu şekilde yazarsak asal çarpanlarının tabanlarda bulunduğu üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazmış oluruz.

ÖRNEK: 36 sayısını bölen listesi ile asal çarpanlarına ayıralım.

36 sayısını 2'den başlayarak asal sayılara sırayla bölüyoruz.

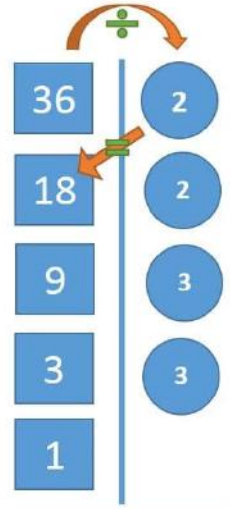
1'i elde ettiğimizde çizginin sağ tarafında kalan sayılar 36'nın asal çarpanlarıdır.

36 sayısının asal çarpanları 2 ve 3'tür.

Çizginin sağ tarafındaki sayıları çarparak 36 sayısını elde edebiliriz.

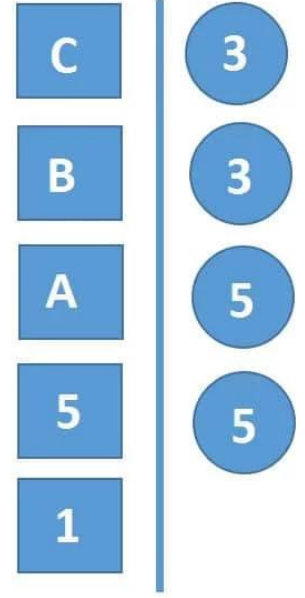
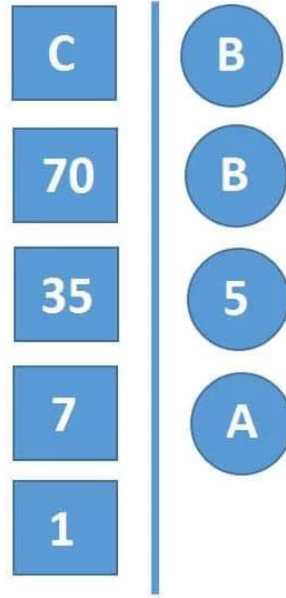
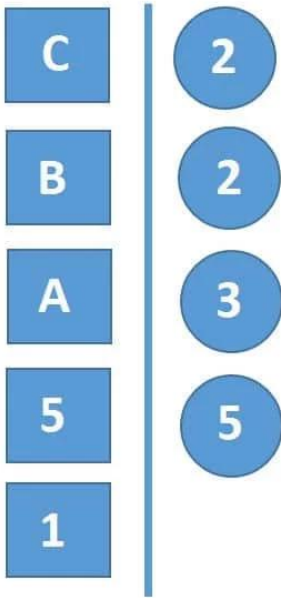
36 sayısının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılmış hali $36 = 2^2 \cdot 3^2$ 'dir.

SORU: Aşağıdaki bölen listelerinde verilmeyen A, B ve C sayılarını bulunuz.



$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

www.matematikciler.org



www.matematikciler.org

ÇÖZÜM: Birinci bölen listesi örneğini birlikte yapalım, kalan bölen listesi örnekleri sizin olsun.

Bölen listesinde soldaki sayıyı sağındaki sayıya böleriz, çıkan sonucu altına yazarız. Alttan başlayarak

$$A : 3 = 5 \text{ olacağı için } A = 15$$

$$B : 2 = 15 \text{ olacağı için } B = 30$$

$$C : 2 = 30 \text{ olacağı için } C = 60 \text{ bulunur.}$$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+

İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI

EBOB – EKOK

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ En Büyük Ortak Bölen
- √ En Küçük Ortak Kat
- √ Ebob – Ekok (Obob-Okek)

6. sınıfta bir doğal sayının bölenleri ve katları nasıl bulunur ve ortak bölenler ve katlar konularını öğrenmiştik. Şimdi ise iki veya daha fazla sayının en küçük ortak katını bulmayı, en büyük ortak bölenini bulmayı, kısaca ebob ekok nasıl bulunur öğreneceğiz.

EN KÜÇÜK ORTAK KAT (EKOK)

İki ya da daha fazla doğal sayının ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı**, kısaca **EKOK**'u denir.

a ve b doğal sayılarının en küçük ortak katı **EKOK(a,b)** veya **(a,b)ekok** şeklinde gösterilir.

Şimdi EKOK nedir daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim.

ÖRNEK: 6 ve 8 sayılarının en küçük ortak katını adım adım bulalım.

► Öncelikle 6 ve 8 sayılarının katlarını yazalım:

6'nın katları : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...

8'in katları : 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...

► Şimdi bu katlardan ortak olanlarını işaretleyelim.

6'nın katları : 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, ...

8'in katları : 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, ...

► Bu ortak katlardan en küçüğü EKOK'tur.

Ortak katlar: **24, 48,**

EKOK (6,8) = 24 veya $(6,8)_{\text{ekok}} = 24$ şeklinde gösteririz.

► **EKOK'un adı üstünde: En Küçük Ortak Kat**

Yani sayıların **kat**larını bulacağız, **ortak** olanlarını bulacağız, bunlardan **en küçük** olanı ekok'tur.

Şimdi EKOK kısa yoldan nasıl hesaplanır öğrenelim.

EKOK NASIL BULUNUR?

EKOK BULMA: İki sayı yan yana yazılarak bölen listesi yapılır. En küçük asal sayıdan başlayarak devam edilir. İki sayı da bölünmüyorsa bir büyük asal sayıya geçilir. İki sayı da 1 olana kadar işleme devam edilir.

Aşağıdaki örneği incelersek 15 ve 20'yi önce en küçük asal sayı olan 2'ye böleriz. 15 bölünmez ancak 20 bölünür. Daha sonra tekrar 2'ye böleriz. 15 bölünmese de 10 bölünür. Daha sonra işleme bu şekilde devam ederiz. İki sayı da 1 olunca işlemimiz biter. Çizginin sağında yazan sayıların çarpımı bu iki sayının en küçük ortak katı yani ekokudur.

15	20	2
15	10	2
15	5	3
5	5	5
1	1	

Tabloda kırmızı ile belirtilen asal çarpanların hepsi çarpılarak, 15 ile 20 sayılarının EKOK u bulunur.

Buna göre,

$$(15, 20)_{\text{ekok}} = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$= 4 \times 15$$

$$= 60 \text{ olur.}$$

www.matematikciler.org

EN BÜYÜK ORTAK BÖLEN (EBOB)

İki ya da daha fazla doğal sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni**, kısaca **EBOB'u** denir.

a ve b doğal sayılarının en büyük ortak böleni **EBOB(a,b)** veya **(a,b)_{ebob}** şeklinde gösterilir.

Şimdi EBOB nedir daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim.

ÖRNEK: 18 ve 24 sayılarının en büyük ortak bölениni adım adım bulalım.

► Öncelikle 18 ve 24 sayılarının bölenlerini yazalım:

18'in bölenleri : 1, 2, 3, 6, 9, 18

24'ün bölenleri : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

► Şimdi bu bölenlerden ortak olanlarını işaretleyelim.

18'in bölenleri : **1, 2, 3, 6**, 9, 18

24'ün bölenleri : **1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.**

► Bu ortak bölenlerin en büyüğü EBOB'tur.

Ortak bölenler: 1, 2, 3, **6**

EBOB (18,24) = 6 veya $(18,24)_{\text{ebob}} = 6$ şeklinde gösteririz.

► **EBOB'un adı üstünde: En Büyük Ortak Bölen**

Yani sayıların **bölenlerini** bulacağız, **ortak** olanlarını bulacağız, bunlardan **en büyük** olanı ebob'tur.

EBOB kısa yoldan nasıl hesaplanır birazdan öğreneceğiz.

EBOB NASIL BULUNUR?

EBOB BULMA: İki sayıyı yan yana yazarak bölen listesi yaparız. En küçük asal sayıdan başlayarak devam ederiz. İki sayı da bölünmüyorsa bir büyük asal sayıya geçilir. İki sayı da 1 olana kadar işleme devam edilir. Ancak burada önemli olan her iki sayıyı da bölen sayıları işaretlememiz gerektiğidir.

Aşağıdaki örneği incelersek 24 ve 32'yi önce en küçük asal sayı olan 2'ye böleriz. İkisini de böldüğü için 2'yi işaretleriz. Sonra benzer şekilde devam ederiz. Her iki sayı da 1 olunca işlemimiz biter ve işaretli sayıların çarpımı bu sayıların en büyük ortak böleni yani ebobudur.

24	32	2
12	16	2
6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1		

Tabloda renkli olarak verilen sayılar karşısında bulunan iki sayıyı da tam bölen asal çarpanlardır.

Yani 2 sayısı karşısındaki 24 ile 32 yi tam böldüğü için renklendirildi. Yine ikinci sıradaki 2 sayısı da 12 ile 16 yı tam böldüğü için renklendirildi. Yine üçüncü sıradaki 2 sayısı ise 6 ile 8 i tam böldüğü için renklendirildi.

Bu renkli sayıların çarpımı 24 ile 32 nin EBOB unu verir.

Buna göre,

$$(24, 32)_{\text{ebob}} = 2 \times 2 \times 2 \\ = 8 \text{ olur.}$$

www.matematikciler.org

EBOB-EKOK İLE İLGİLİ NOTLAR

İki sayının çarpımı, EBOB'ları ile EKOK'larının çarpımına eşittir.

ÖRNEK: 6 ve 8 sayılarını inceleyelim:

$$\text{EBOB}(6,8) = 2$$

$$\text{EKOK}(6,8) = 24$$

$$\text{Bu iki sayının çarpımı} : 6 \cdot 8 = 48$$

$$\text{EBOB}(6,8) \cdot \text{EKOK}(6,8) : 2 \cdot 24 = 48$$

Biri diğerinin katı olan sayıların EBOB'ları küçük sayıya, EKOK'ları büyük sayıya eşittir.

ÖRNEK: 6 ve 12 sayılarını inceleyelim:

$$\text{EBOB}(6,12) = 6$$

$$\text{EKOK}(6,12) = 12$$

EBOB sayılardan büyük olamaz, EKOK sayılardan küçük olamaz.

EKOK \geq SAYILAR \geq EBOB

EBOB – EKOK PROBLEMLERİ

EBOB ve EKOK özellikle problemlerde çok karıştırılır. Hangi soruda EBOB, hangi soruda EKOK bulacağımızı karıştırmamalıyız. Peki nasıl ayırt edebiliriz? Bir soru ebob sorusu mu ekok sorusu mu nasıl anlarız?

Cevabı çok basit: Düşünerek

Soruda size verilenler ile istenilen şeye nasıl ulaşabileceğinizi biraz düşünürseniz ebob-ekok problemlerini ayırt etmeniz çok kolay olur. Eğer istenilen şeye verilen sayıların katlarından ulaşacak isek ekok, verilen sayıların bölenlerinden ulaşacak isek ebob kullanılır.

EBOB Problemleri

İki veya daha fazla çokluğun ortak bölenlerinin en büyüğüdür. Doğal olarak sorularda bütünü parçalamamızı istiyorsa ebob kullanma ihtimalimiz yüksek.

EBOB SORULARI GENELDE ŞÖYLEDİR:

- Bidonlarda, varillerde, şişelerde, çuvallarda, kaplarda bulunan malzemeler daha küçük başka kaplara aktarılıyorsa,
- Tarlanın etrafına eşit aralıklarla ağaç veya direk dikiliyorsa,
- İnsanlardan oluşan gruplar için kaç uçak, otobüs, araba veya oda gerekir diye soruluyorsa,
- Dikdörtgenler prizması şeklindeki odanın, kutunun, deponun içine kaç küp sığar diye soruluyorsa,
- Kumaşlar, bezler, demir çubuklar parçalara ayrılacaksa,
- Dikdörtgen şeklindeki kartondan küçük kare kartonlar elde ediliyorsa ebob kullanılır.

ÖRNEK: 80 cm ve 120 cm uzunluğunda iki demir çubuk, boyları birbirine eşit parçalara ayrılacaktır. Bir parçanın uzunluğu en fazla kaç cm olur?

EBOB (80, 120) = 2.2.2.5 = 40 cm

EKOK Problemleri

İki veya daha fazla çokluğu ortak katlarının en küçüğüdür. Doğal olarak sorularda parçalardan bütüne gitmemiz istiyorsa ekok kullanma ihtimalimiz yüksek.

EKOK SORULARI GENELDE ŞÖYLEDİR:

- Cevizler, fındıklar, şekerler, bilyeler üçer-beşer-vb sayılıyorsa veya bunlar sayıldıktan sonra artan oluyorsa,
- Gemiler, arabalar, yarışçılar beraber yola çıkıp bir yerde karşılaşıyorsa,
- Sınıfta öğrenciler ikişer-üçer-vb sıralara oturuyorlarsa veya bunlardan ayakta kalanlar oluyorsa,
- Ziller, saatler birlikte ne zaman bir daha çalar diye soruluyorsa,

- Dikdörtgenler prizması şeklindeki tuğlalardan küp yapılıyorsa ekok kullanılır.

ÖRNEK: Tarık bilyelerini 4'er , 5'er , 6'şar saydığında her defasında 1 bilyesi artıyor.Buna göre, Tarık'ın en az kaç tane bilyesi vardır?

$$\text{EKOK}(4,5,6) = 2.2.3.5 = 60$$

$$60 + 1 = 61 \text{ bilye}$$

|

--	--

--	--

--	--



Aralarında Asal Sayılar

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Aralarında Asal Sayılar
- √ Aralarında Asal Sayılar ile İlgili Özellikler

Bu konuda aralarında asal sayılar nedir, aralarında asal sayı ne demektir öğreneceksiniz. Bu konuya başlamadan önce EBOB-EKOK konusuna bakmanızı tavsiye ederiz.

ARALARINDA ASAL SAYILAR

İki ya da daha fazla doğal sayının 1'den başka ortak böleni yoksa bu sayılara **aralarında asal sayılar** denir.

ÖRNEK: 16 ve 35 sayılarının ortak bölenlerini adım adım bulalım.

Öncelikle 16 ve 35 sayılarının bölenlerini yazalım:

16'nın bölenleri: 1, 2, 4, 8, 16

35'in bölenleri: 1, 5, 7, 35

Şimdi bu bölenlerden ortak olanlarını işaretleyelim.

16'nın bölenleri: **1**, 2, 4, 8, 16

35'in bölenleri: **1**, 5, 7, 35

Görüldüğü gibi bu iki sayının ortak bölenleri sadece 1'dir. Bu yüzden bu iki sayıya aralarında asal sayılar denir.

ÖRNEK: 18 ve 21 sayılarının aralarında asal olup olmadığını bulalım.

18 ve 21 sayılarının bölenlerini yazalım ve ortak olanlarını işaretleyelim.

18'in bölenleri: **1, 2, 3, 6, 9, 18**

21'in bölenleri: **1, 3, 7, 21**

Görüldüğü gibi bu iki sayının ortak bölenleri 1 ve 3'tür. 1'den başka ortak bölenleri bulunduğu için bu iki sayı aralarında asal sayı değildir.

ARALARINDA ASAL SAYILAR İLE İLGİLİ NOTLAR

Aralarında asal sayıların ebob'ları 1'dir.

ÖRNEK: 16 ve 35 sayıları aralarında asal sayılardır.

Bu yüzden EBOB'ları 1 çıkacaktır. $EBOB(16,35) = 1$

Aralarında asal iki sayının ekok'ları sayıların çarpımına eşittir.

ÖRNEK: 5 ve 6 sayıları aralarında asal sayılardır.

Bu yüzden EKOK'ları bu iki sayının çarpımına eşit çıkacaktır. $EKOK(5,6) = 30$

Ardışık iki sayılar ve ardışık tek sayılar daima aralarında asaldır.

ÖRNEK: 23 ve 24 sayıları ardışık sayılardır. 35 ve 37 sayıları ardışık tek sayılardır.

Bu yüzden 23-24'ün ve 35-37'nin aralarında asal olduklarını işlem yapmadan bilebiliriz.

Çift sayılar aralarında asal olamaz.

ÖRNEK: 28 ve 46 sayıları aralarında asal değildir.

Çünkü çift sayıların hepsi 2'ye tam bölündüğü için ortak bölenleri sadece 1 değildir. Bu yüzden aralarında asal değildir.

Farklı asal sayılar her zaman aralarında asaldır.

ÖRNEK: 5 ve 23 ikisi de asal sayı olduğu için aralarında asaldır.

5'in pozitif bölenleri: **1 ve 5**

23'ün pozitif bölenleri: **1 ve 23**

Asal sayıların pozitif bölenleri sadece 1 ve kendileri olduğu için farklı asal sayıların ortak bölenleri sadece 1 olur. Bu yüzden aralarında asal olurlar.

Aralarında asal sayıların asal sayı olması gerekmez.

ÖRNEK: 9 ve 64 aralarında asaldır ancak ikisi de asal sayı değildir.

Aralarında asal sayı kavramı ile asal sayı kavramını karıştırmamak gerekir.

Üslü İfadeler – Tam Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

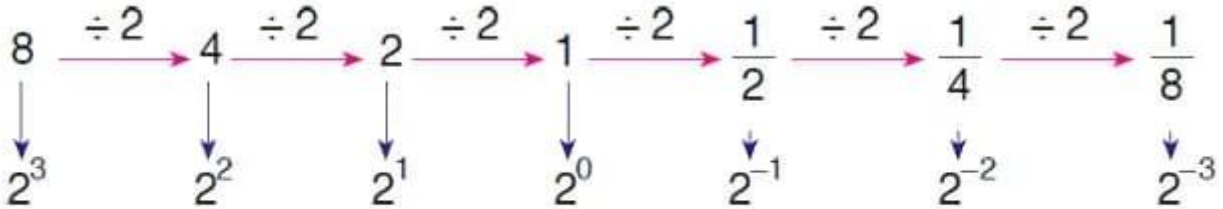
- √ Üslü İfadeler
- √ Tam Sayıların Tam Sayı Kuvveti
- √ Negatif Üslü Sayılar
- √ Tam Sayıların Negatif Kuvveti

Tam sayıların doğal sayı kuvvetlerini 7. sınıfta öğrenmiştik. Bu konuda ise tam sayıların negatif kuvvetlerini göreceğiz. Bu konuya başlamadan önce Tam Sayıların Kuvvetleri Konusuna göz atmanızı tavsiye ediyoruz.

NEGATİF ÜS ALMA

Aşağıdaki görsele bakarak negatif üslü sayılara giriş yapalım.

Aşağıda 8 sayısı art arda 2'ye bölünerek bir sayı örüntüsü oluşturulmuştur. Oluşturulan örüntünün her terimini üslü sayı ile ifade edersek dikkat edilirse her adımda üs bir azalmıştır.



www.matematikciler.org

Yukarıdaki örüntüden de keşfettiğimiz şekilde:

Payı 1 olan rasyonel sayılar, bir tam sayının negatif tam sayılı kuvveti şeklinde gösterilir.



$a, n \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ için,

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \text{ ve } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ 'dir.}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

www.matematikciler.org

Sıfırdan farklı her tam sayının sıfırncı kuvveti 1'e eşittir.

ÖRNEK: $2^0 = 1$

NEGATİF TAM SAYILARIN NEGATİF ÜSSÜNÜ BULMA

Aşağıda -8 (yani $(-2)^3$) sayısı art arda -2 'ye bölünerek bir sayı örüntüsü oluşturulmuştur. Oluşturulan örüntünün her terimini üslü sayı ile ifade edersek dikkat edilirse her adımda üs bir azalmıştır.

$$\begin{array}{cccccccc} -8 & \xrightarrow{\div (-2)} & 4 & \xrightarrow{\div (-2)} & -2 & \xrightarrow{\div (-2)} & 1 & \xrightarrow{\div (-2)} & -\frac{1}{2} & \xrightarrow{\div (-2)} & \frac{1}{4} & \xrightarrow{\div (-2)} & -\frac{1}{8} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (-2)^3 & & (-2)^2 & & (-2)^1 & & (-2)^0 & & (-2)^{-1} & & (-2)^{-2} & & (-2)^{-3} \end{array}$$

www.matematikciler.org

Yukarıdaki örüntüden de keşfettiğimiz şekilde:

Negatif bir tam sayının çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri ise negatiftir.

$$(-2)^3 = -8$$

$(-2)^2 = 4$ gibi...

Genel olarak üslü bir tam sayının işareti:

Tam sayı pozitif ise bütün kuvvetleri pozitif olur.

Tam sayı negatif ise çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri negatif olur.

Bir üslü ifade paydadan paya veya paydan paydaya alındığında kuvvetin işareti değişir.

$a, n, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \neq 0$ için,

$$\frac{a^n}{a^b} = a^n \cdot a^{-b} \text{ veya } \frac{a^n}{a^b} = \frac{1}{a^{-n} \cdot a^b} \text{ 'dir.}$$

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} \quad \left| \quad -\frac{1}{216} = -\frac{1}{6^3} = -6^{-3}$$

www.matematikciler.org

Yukarıdaki örnekleri incelersek $(-5)^{-2}$ paydaya alınınca $(-5)^2$ olur.

Benzer şekilde paydadaki 6^3 paya alınınca 6^{-3} olur.

--	--

--	--

--	--

--	--

Ondalık Kesirlerin ve Rasyonel Sayıların Kuvvetleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Ondalık Sayılarda Üs Alma
- √ Rasyonel Sayıların Üslü Gösterimi

RASYONEL SAYILARIN TEKRARLI ÇARPIMINI ÜSLÜ OLARAK YAZMA

Rasyonel sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımı üslü şekilde yazılabilir. Sayı kaç kez çarpım olarak yazıldıysa üsse bu sayı yazılır.

ÖRNEK: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ çarpımını üslü olarak gösterelim.

Aynı sayı 4 kere çarpım şeklinde yazıldığı için üslü olarak gösterimi $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 'tür.

ÖRNEK: $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadesini üslü olarak gösterelim.

Aynı sayı 3 kere çarpım şeklinde yazıldığı için bu sayının üssüne 3 yazarız.

$\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ olarak yazılır.

RASYONEL SAYILARIN KUVVETLERİNİ BULMA

Rasyonel sayıların kuvvetleri hesaplanırken taban üsteki sayı kadar çarpım şeklinde yazılır ve daha sonra çarpma işlemi yapılır.

ÖRNEK: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ sayısının değerini bulalım.

Üste 2 olduğu için; $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ sonucu bulunur.

ÖRNEK: $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$ ifadesinin değerini bulalım.

Üsteki -3'ün +3 olması için pay ve payda yer değiştirir. Daha sonra kesrimizi 3 kere çarpalım.

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

ONDALIK KESİRLERİN TEKRARLI ÇARPIMINI ÜSLÜ OLARAK YAZMA

Ondalık kesirlerin kendileri ile tekrarlı çarpımı üslü şekilde yazılabilir. Sayı kaç kez çarpım olarak yazıldıysa üsse bu sayı yazılır.

ÖRNEK: $(0,2) \cdot (0,2) \cdot (0,2)$ çarpımını üslü olarak gösterelim.

3 tane 0,2 çarpım şeklinde yazıldığı için üslü olarak gösterimi $(0,2)^3$ 'tür.

ÖRNEK: $(1,5) \cdot (1,5) \cdot (1,5) \cdot (1,5)$ ifadesini üslü olarak gösterelim.

1,5 sayısı 4 kere kendisi ile çarpıldığı için

$(1,5) \cdot (1,5) \cdot (1,5) \cdot (1,5) = (1,5)^4$ olarak yazılır.

ONDALIK KESİRLERİN KUVVETLERİNİ BULMA

Ondalık kesirlerin kuvvetleri hesaplanırken rasyonel sayıya çevrilerek bulunabilir.

ÖRNEK: $(0,2)^3$ sayısının değerini bulalım.

2 farklı yolla bulabiliriz. 1. yol olarak ondalık gösterimlerle çarpma işlemi kullanabiliriz. Buna göre:

$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$ cevabına ulaşırız.

2. yol olarak da bu sayıları rasyonel sayı olarak yazıp işlem yaparız. Buna göre:

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{1000} \text{ olur.}$$

ÖRNEK: $(0,1)^3$ ifadesinin değerini bulalım.

$$(0,1)^3 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \text{ olur.}$$

ÖRNEK: $(0,3)^{-3}$ ifadesinin değerini bulalım.

$$(0,3)^{-3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1000}{27} \text{ bulunur.}$$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI
+	İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI
+	TEST ÇÖZME BAĞLANTISI

Ondalık Gösterimleri Üslü Sayılarla Çözümleme



BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Ondalık Sayıları Çözümleme
- √ 10'un Kuvvetlerini Kullanarak Çözümleme
- √ Üslü Sayılarla Çözümleme

Önceki yıllardan bildiğimiz gibi çözümleme, bir sayının rakamlarının basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına diyoruz.

ÖRNEK: 325,6 sayısının çözümlenmiş hali $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0,1$

Bu konumuzda ondalık gösterimleri verilen sayıları çözümlemeyi ve bu çözümlemeyi 10'un kuvvetlerini kullanarak yapmayı göreceğiz.

SAYILARIN ONDALIK GÖSTERİMLERİNİ 10'UN KUVVETLERİNİ KULLANARAK ÇÖZÜMLEME

Çözümleme yapılırken her rakam, bulunduğu basamağın basamak değeri ile çarpılır ve bu çarpımlar toplanır.



Bu yüzden basamak isimlerini ve bu basamakların 10'un kaçınıcı kuvveti olduğunu bilmemiz gerekir. Öncelikle basamak isimlerini hatırlayalım.

TAM KISIM			VİRGÜL	KESİR KISMI		
Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı		Onda Birler Basamağı	Yüzde Birler Basamağı	Binde Birler Basamağı
2	6	8	,	1	7	4

Çözümleme yaparken her bir rakamı bulunduğu basamağın değeriyle çarpacağız ve bunları toplayacağız. Basamak değerlerini farklı şekillerde gösterebiliriz. Bu konumuzda 10'un kuvvetlerini kullanacağız.

Yüzler basamağı 10^2

Onlar basamağı 10^1

Birler basamağı 10^0

Onda birler basamağı 10^{-1}

Yüzde birler basamağı 10^{-2}

Binde birler basamağı 10^{-3}

ÖRNEK : 268,174 sayısını 10'un kuvvetlerini kullanarak çözümleyelim.

ÇÖZÜM :

TAM KISIM			VİRGÜL	KESİR KISMI		
Yüzler Basamağı	Onlar Basamağı	Birler Basamağı		Onda Birler Basamağı	Yüzde Birler Basamağı	Binde Birler Basamağı
2	6	8	,	1	7	4

$$268,174 = 2.100 + 6.10 + 8.1 + 1.0,1 + 7.0,01 + 4.0,001$$

$$268,174 = 2.100 + 6.10 + 8.1 + 1.\frac{1}{10} + 7.\frac{1}{100} + 4.\frac{1}{1000}$$

$$268,174 = 2.10^2 + 6.10^1 + 8.10^0 + 1.10^{-1} + 7.10^{-2} + 4.10^{-3}$$

www.matematikciler.org

ÖRNEK: 35,02 sayısının çözümlemesi $35,02 = 3.10^a + 5.10^b + 2.10^c$ ise $(c + a)^b$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

3 rakamı onlar basamağında olduğu için ve 10 sayısı 10'un 1. kuvveti olduğundan $a = 1$

5 rakamı birler basamağında olduğu için ve 1 sayısı 10'un 0. kuvveti olduğundan $b = 0$

2 rakamı yüzde birler basamağında olduğu için ve 1/100 sayısı 10'un -2. kuvveti olduğu için $c = -2$

Sonuç olarak $(c + a)^b = (-2 + 1)^0 = (-1)^0 = 1$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI
+	İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI
+	TEST ÇÖZME BAĞLANTISI
+	KONU KAZANIMLARI

← ÖNCEKİ KONU	SONRAKİ KONU →
Rasyonel Sayıların Kuvvetleri	Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme

Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Üslü Bir Sayının Üssü
- √ Üslü Sayılarla Çarpma İşlemi Nasıl Yapılır?
- √ Üslü Sayılarla Bölme İşlemi Nasıl Yapılır?



ÜSLÜ SAYININ ÜSSÜ

Üslü bir sayının üssü alınırken üsler çarpılır.

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$



ÖRNEK: Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

$$\blacktriangleright (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$\blacktriangleright (0,7^{-1})^2 = 0,7^{-1 \cdot 2} = 0,7^{-2} = \left(\frac{7}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{7}\right)^2 = \frac{100}{49}$$

ÜSLÜ İFADELERLE ÇARPMA İŞLEMİ

Üslü ifadelerle çarpma işlemi ile ilgili 2 kural öğreneceğiz.

Tabanları aynı olan üslü sayılarla çarpma işlemi yapılırken üsler toplamı, ortak taban olarak yazılır.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$



ÖRNEK: Aşağıdaki işlemleri inceleyelim.

$$\blacktriangleright 2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7$$

$$\blacktriangleright 3^4 \cdot 3^{-7} = 3^{4+(-7)} = 3^{-3}$$

$$\blacktriangleright (-2)^5 \cdot (-2)^4 = (-2)^9$$

Üsleri aynı olan üslü sayılarla çarpma işlemi yapılırken tabanlar çarpılır, ortak üsse taban olarak yazılır.

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$



ÖRNEK: Aşağıdaki işlemleri inceleyelim.

- ▶ $2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$
- ▶ $6^{-2} \cdot 3^{-2} = (6 \cdot 3)^{-2} = 18^{-2}$
- ▶ $(-2)^5 \cdot 2^5 = (-2 \cdot 2)^5 = (-4)^5$

Hem tabanlar hem üsler aynı ise yukarıdaki işlemlerden herhangi biri yapılabilir.



ÜSLÜ İFADELERLE BÖLME İŞLEMİ

Üslü ifadelerle bölme işlemi ile ilgili 2 kural öğreneceğiz.

Tabanları aynı olan üslü sayılarla bölme işlemi yapılırken bölünen sayının üssünden bölen sayının üssü çıkartılır, ortak tabana üs olarak yazılır.

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$



ÖRNEK: Aşağıdaki işlemleri inceleyelim.

- ▶ $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$
- ▶ $3^4 : 3^{-7} = 3^{4-(-7)} = 3^{4+7} = 3^{11}$
- ▶ $\frac{(-2)^{-5}}{(-2)^3} = (-2)^{-5-3} = (-2)^{-8}$

Üsleri aynı olan üslü sayılarla bölme yapılırken tabanlar bölünür, ortak üsse taban olarak yazılır.

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$



ÖRNEK: Aşağıdaki işlemleri inceleyelim.

- ▶ $12^5 : 3^5 = (12 : 3)^5 = 4^5$
- ▶ $\frac{3^{-2}}{6^{-2}} = \left(\frac{3}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$

Hem tabanlar hem üsler aynı ise yukarıdaki işlemlerden herhangi biri yapılabilir.



TABANLARI VE ÜSLERİ FARKLI ÜSLÜ SAYILARLA ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMİ

Hem tabanları, hem de üsleri farklı üslü sayılarla çarpma ve bölme işlemi yapmak için tabanlar veya üsler eşitlenir.



Bunu birkaç örnekle açıklayalım.

ÖRNEK: $2^5 \cdot 4^3$ işleminin sonucunu, üslü sayı olarak bulalım.

Bu işlemde tabanlar eşitlenebilir çünkü 4, 2'nin kuvvetidir.

$$2^5 \cdot 4^3 = 2^5 \cdot (2^2)^3 = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{11} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK: $\frac{27^2}{3^5}$ işleminin sonucunu bulalım.

Bu işlemde tabanlar eşitlenebilir çünkü 27, 3'ün kuvvetidir.

$$\frac{27^2}{3^5} = \frac{(3^3)^2}{3^5} = \frac{3^6}{3^5} = 3^{6-5} = 3^1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK: $\frac{2^6 \cdot 9^3}{125^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Bu işlemde üsler eşitlenebilir.

$$\frac{2^6 \cdot 9^3}{125^2} = \frac{2^6 \cdot (3^2)^3}{(5^3)^2} = \frac{2^6 \cdot 3^6}{5^6} = \left(\frac{2 \cdot 3}{5}\right)^6 = 1,2^6 \text{ bulunur.}$$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI
+	İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI
+	TEST ÇÖZME BAĞLANTISI
+	KONU KAZANIMLARI

← ÖNCEKİ KONU	SONRAKİ KONU →
Sayıları 10'un Kuvvetleriyle Çözümleme	Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkarma

Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi



BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

√ Üslü Sayılarla Toplama İşlemi

√ Üslü Sayılarla Çıkarma İşlemi

Üslü sayılarda toplama ve çıkarma işlemi ayrı bir kazanım olarak müfredatta yer bulmasa da öğrencilerin bu sorularla karşılaştığında ne yapması gerektiğini bilmeleri için biraz bahsedelim.

Tabanları veya üsleri farklı üslü sayılarla toplama ve çıkarma işlemine girmeyeceğiz çünkü bu konuyla ilgili 8. sınıf müfredatında bir kazanım bulunmamaktadır.

Bu konuya başlamadan önce Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi konusunu tekrar etmeniz faydalı olacaktır.

ÜSLÜ SAYILARDA TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMLERİ

Üslü sayılarda toplama ve çıkarma işlemi yaparken için önce üslü sayıların değeri bulunur.

ÖRNEK: $2^3 + 2^2$ işleminin sonucunu bulalım.

$2^3=8$ ve $2^2=4$ olduğundan

$8+4=12$ cevabını buluruz.

ÖRNEK: $5^{-2} + (-5)^2$ işleminin sonucunu bulalım.

Önce üslü sayıların değerlerini bulduk, daha sonra ise paydaları eşitleyerek toplama işlemi yaptık.

$\frac{1}{25} + 25 = \frac{1}{25} + \frac{25}{1} = \frac{1}{25} + \frac{625}{25} = \frac{626}{25}$ olarak bulunur.

ÖRNEK: $3^2 - 2^2$ işleminin sonucunu bulalım.

$3^2=9$ ve $2^2=4$ olduğundan

9-4=5 cevabını buluruz.

Hem tabanları hem de üsleri aynı olan üslü sayılarda bu sayılarla çarpım durumunda bulunan katsayılar arasında toplama ve çıkarma işlemi yapılabilir.

ÖRNEK: Bir kenarının uzunluğu 2^7 cm olan karenin çevresini bulalım.

$$\text{Çevre} = 2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^7$$

4 tane 2^7 sayısını topladığı için bunu kısaca 4.2^7 şeklinde yazabiliriz.

$$4.2^7 = 2^2.2^7 = 2^9$$

ÖRNEK: $5.3^{15} - 2.3^{15}$ işleminin sonucunu bulalım.

Hem tabanlar hem üsler aynı olduğu için katsayılar arasında işlem yapılır.

$$(5-2).3^{15} = 3.3^{15} = 3^{16}$$

Tabanları aynı, üsleri farklı olan üslü ifadelerde toplama işlemi veya çıkarma işlemi yapılırken üsler eşitlenir ve daha sonra katsayılar arasında işlem yapılır.

ÖRNEK: $3^{14} + 3^{13} - 3^{12}$ işleminin sonucunu bulalım.

Üsler en düşük olan üsse göre eşitlenebilir.

$3^2 \cdot 3^{12} = 3^{14}$ olduğu için biz 3^{14} yerine bu ifadeyi yazabiliriz. Benzer durum 3^{13} için de geçerli. Buna göre:

$3^{14} + 3^{13} - 3^{12}$ ifadesini şu şekilde düzenler ve işlem yaparız:

$$= 3^2.3^{12} + 3^1.3^{12} - 3^{12}$$

$$= 9.3^{12} + 3.3^{12} - 1.3^{12}$$

$$= (9+3-1).3^{12} = 11.3^{12} \text{ olarak sonucu buluruz.}$$

← ÖNCEKİ KONU

Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme

SONRAKİ KONU →

Bilimsel Gösterim

Bilimsel Gösterim

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ 10'un kuvvetleri
- √ Çok Büyük Sayıların Bilimsel Gösterimi
- √ Çok Küçük Sayıların Bilimsel Gösterimi



10'UN KUVVETLERİ

a bir tam sayı olmak üzere $a \cdot 10^n$ sayısında; n pozitif tam sayı ise a'nın sağına n tane sıfır yazılır.



ÖRNEK: $15 \cdot 10^4 = 150000$ (15'in yanına 4 tane sıfır yazdık)

Bu işlemin sonucu 6 basamaklıdır.

n negatif tam sayı ise virgülden sonra n tane basamak olur ve a sayısı sağa yaslı olarak yazılır. Boş kalan basamaklara koyulur.

ÖRNEK: $5 \cdot 10^{-4} = 0,0005$ (Virgülden sonra 4 basamak yazdık)

"İşleminin sonucu kaç basamaklıdır?" veya "Sayısının sonunda kaç tane sıfır (0) vardır?" soruları çözmek için genelde 10'un kuvvetlerine başvururuz. 10'un kuvvetine ulaşmak için 10'un kuvvetini bulur ve çarparız.



ÖRNEK: $5^{14} \cdot 2^{14}$ işleminin sonunda kaç tane 0 vardır ve işlemin sonucu kaç basamaklıdır?

Üsler aynı olduğu için tabanlar çarpılır.

$$5^{14} \cdot 2^{14} = 10^{14}$$

Sonuç olarak bu işlemin sonucunda 1'in yanında 14 tane sıfır vardır ve sonuç 15 basamaklıdır.

ÖRNEK: $5^{26} \cdot 4^{12}$ işleminin sonunda kaç tane 0 vardır bulalım.

Amacımız tabanı 10 yapmak. Bunun için 5 ve 2'ye ihtiyacımız var. O yüzden 4'ü 2'nin karesi olarak yazar sonra üsleri eşitleriz.

$$5^{26} \cdot 4^{12} = 5^{26} \cdot 2^{24} = 5^2 \cdot 5^{24} \cdot 2^{24} = 25 \cdot 10^{24}$$

İşlemin sonucunda 25'in yanında 24 tane 0 vardır ve sonuç 26 basamaklı bir sayıdır.

BİLİMSEL GÖSTERİM NEDİR?

Bilimsel gösterim, çok büyük ve çok küçük sayıları göstermek için kullanılan bir standarttır. Bilim adamlarının ilgilendikleri pek çok nicelik ya çok büyük ya da çok küçük değerlerdir. Böyle sayıları okumak, onlarla işlem yapmak çok zordur. Bilimsel gösterim sayesinde 10 sayısının kuvvetlerini kullanarak böyle zorluklardan kurtuluruz. Bilimsel gösterim, hayatımızdaki çok büyük ve çok küçük sayılarla işlem yapmamızı kolaylaştırır.

Bir sayının bilimsel gösterimle gösterilebilmesi için şu şekilde yazılması gerekir.

(a sayısının mutlak değeri), 1 ile 10 arasında (1 dahil) bir sayı, n bir tam sayı olmak üzere sayının $|a| \cdot 10^n$ biçiminde gösterimine o sayının bilimsel gösterimi denir. Bilimsel gösterim $1 \leq |a| < 10$ ve n bir tam sayı olmak üzere $|a| \cdot 10^n$ şeklindedir.

Bilimsel Gösterim	Bilimsel Gösterim Değil
$1,2 \cdot 10^{12}$	$12 \cdot 10^{12}$
$8 \cdot 10^{24}$	$0,2 \cdot 10^{17}$
$1 \cdot 10^{-6}$	$10 \cdot 10^{-2}$

ÇOK BÜYÜK SAYILARIN BİLİMSEL GÖSTERİMİ

Çok büyük sayılarda 10'un kuvveti pozitif bir tam sayıdır. Çok büyük sayıların bilimsel gösterimini örneklerle açıklayalım.

Bir sayıyı bilimsel gösterimle göstermek için virgöl sola kaydırılırsa 10'un üzeri arttırılır, sağa kaydırılırsa 10'un üzeri azaltılır.

ÖRNEK: 21 000 000 000 sayısını bilimsel gösterimle gösterelim.

Tam sayıların virgülü en sondadır. Bilimsel gösterim olabilmesi için virgöl 2'nin sağına gelmelidir.

$$2,1\ 000\ 000\ 000, = 2,1 \cdot 10^{10}$$


www.matematikciler.org

ÖRNEK: 314 000 000 000 000 sayısını bilimsel gösterimle gösterelim.

Tam sayıların virgüğü en sondadır. Bilimsel gösterim olabilmesi için virgöl 3'ün sağına gelmelidir.

$$3,14\ 000\ 000\ 000\ 000, = 3,14 \cdot 10^{14}$$


www.matematikciler.org

ÇOK KÜÇÜK SAYILARIN BİLİMSEL GÖSTERİMİ

Çok küçük sayılarda 10'un kuvveti negatif bir tam sayıdır. Çok küçük sayıların bilimsel gösterimini örneklerle açıklayalım.

Bir sayıyı bilimsel gösterimle göstermek için virgöl sola kaydırılırsa 10'un üzeri arttırılır, sağa kaydırılırsa 10'un üzeri azaltılır.

ÖRNEK: 0,000000007 sayısını bilimsel gösterimle gösterelim.

Bilimsel gösterim olabilmesi için virgöl 7'nin sağına gelmelidir.

$$0,00000000007, = 7 \cdot 10^{-10}$$



www.matematikCiler.org

ÖRNEK: 0,0000000000001234 sayısını bilimsel gösterimle gösterelim.

Bilimsel gösterim olabilmesi için virgöl 1'nin sağına gelmelidir.

$$0,000000000000001,234 = 1,234 \cdot 10^{-13}$$



www.matematikCiler.org

ÖRNEK: $(2,3 \cdot 10^7) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ işleminin sonucunu bilimsel gösterimle gösterelim.

$$(2,3 \cdot 10^7) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$$

$$= 11,5 \cdot 10^4$$

Virgöl bir sola giderse, 10'un üzeri 1 artar.

$$= 11,5 \cdot 10^4 = 1,15 \cdot 10^5$$

www.matematikciler.org

NEGATİF SAYILARIN BİLİMSEL GÖSTERİMİ

Bilimsel gösterim negatif olur mu? Negatif sayıları da bilimsel gösterimle gösterebiliriz.

ÖRNEK: -53000 sayısını bilimsel gösterimle gösterelim.

Pozitif örneklerde olduğu gibi negatif sayılarda da virgölü uygun yere kaydırarak sayıyı bilimsel gösterimle gösterebiliriz.

Bilimsel gösterim olabilmesi için virgöl 5 ile 3'ün arasına gelmelidir. Böylelikle sayımız $-5,3 \cdot 10^4$ olur. Burada $-5,3$ sayısının mutlak değeri 1 ile 10 arasında olduğu için bilimsel gösterime uygundur.

-53000 sayısının bilimsel gösterimi: $-5,3 \cdot 10^4$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI
+	İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI
+	TEST ÇÖZME BAĞLANTISI

+**KONU KAZANIMLARI****← ÖNCEKİ KONU****SONRAKİ KONU →**

Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkarma

Kareköklü Sayılara Giriş ve Tam Kare Sayılar

Kareköklü Sayılara Giriş ve Tam Kare Sayılar

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Kareköklü İfadeler
- √ Tam Kare Sayılar
- √ Tam Kare Sayıların Karekökünü Bulma



KAREKÖK NEDİR?

Verilen sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemine karekök alma işlemi denir. Karekök " $\sqrt{\quad}$ " sembolü ile gösterilir. \sqrt{x} sayısı "karekök x" şeklinde okunur.



Negatif bir sayının karekökü alınamaz çünkü negatif bir sayı hiç bir sayının karesi olamaz.

Şimdi karekökü daha iyi kavramak için bir örnek verelim.

ÖRNEK: 9 hangi sayının/sayıların karesidir bulalım.

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$9 = (-3) \cdot (-3) = (-3)^2 \text{ olduğundan}$$

9 hem 3'ün hem de -3'ün karesidir.

$\sqrt{\quad}$ sembolü, bir sayının pozitif karekökünü bulmak için kullanılır.



ÖRNEK: $\sqrt{9}$ sayısının değerini bulalım.

Bir önceki örnekte gördüğümüz gibi 9, 3 ve -3'ün karesidir. Karekök işlemi de bir sayının hangi sayının karesi olduğunu bulmadır.

Bu yüzden $\sqrt{9} = 3$ 'tür.

TAM KARE SAYILAR VE KAREKÖKLERİ

Bir tam sayının karesi olan, diğer bir ifade ile karekökü tam sayı olan doğal sayılara **tam kare sayılar** denir. Tam kare sayılara karesel sayılar da denir. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, ... sayıları tam kare sayılardır.



$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

$$9^2 = 81$$

$$10^2 = 100$$

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

$$15^2 = 225$$

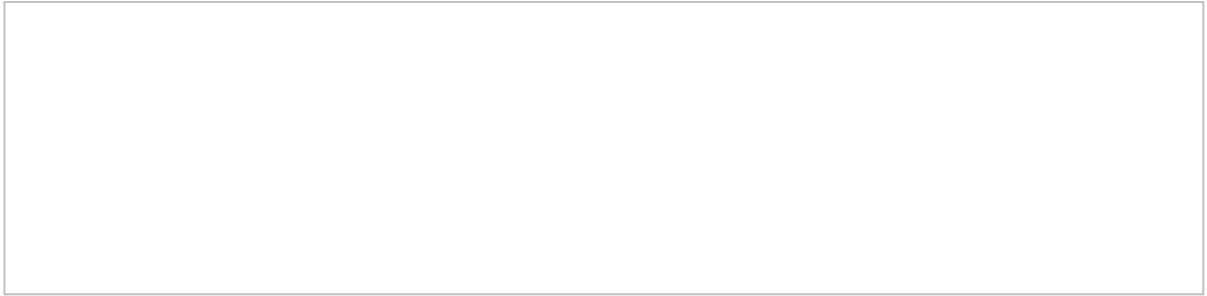
$$16^2 = 256$$

$$17^2 = 289$$

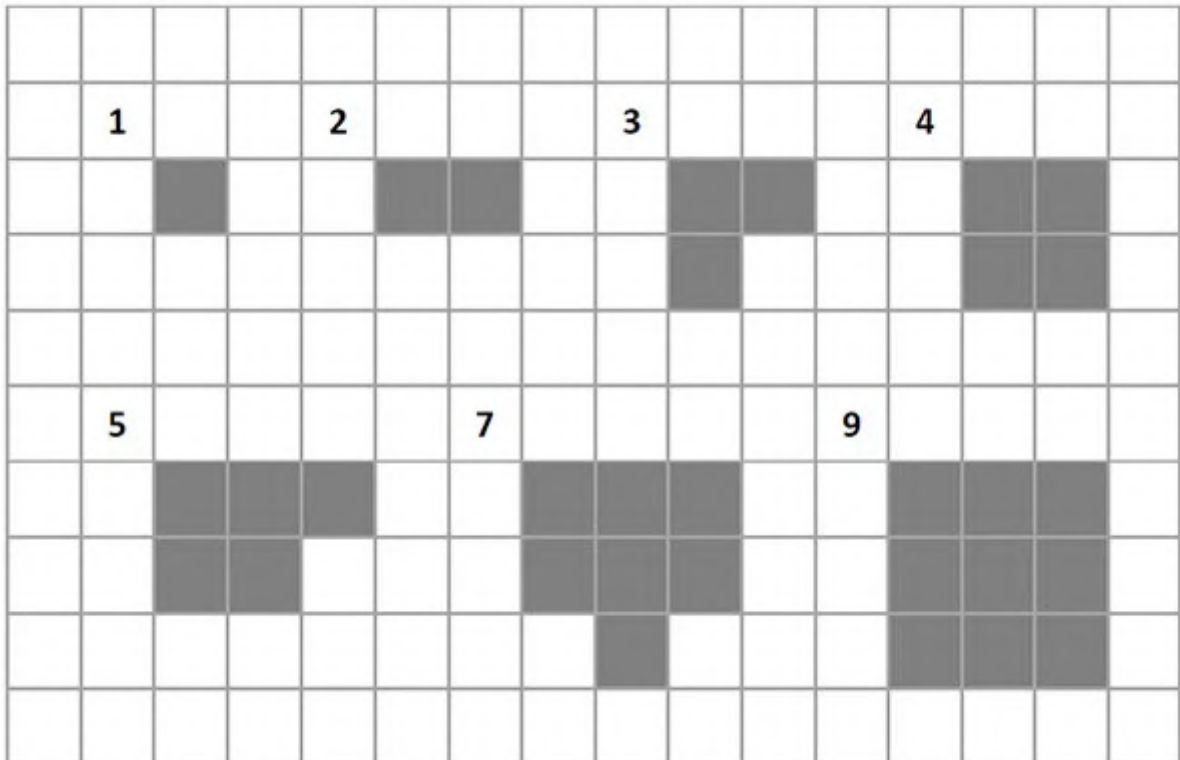
$$18^2 = 324$$

$$19^2 = 361$$

Tam kare sayıların karekökleri tam sayıdır.



Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi 1, 4, 9 gibi tam kare sayılarla kenarları tam sayı olan kareler elde edilebiliyor. Ancak 2, 3, 5, 7 gibi sayılarla kenarları tam sayı olan kareler elde edilemiyor.



Kenar uzunluğu verilen bir karenin alanını bulmak için kenar uzunluğunun karesi alınır. Aynı şekilde, alanı verilen bir karenin bir kenarının uzunluğunu bulmak için alanının karekökünü alırız.



ÖRNEK: Alanı 25 br^2 olan bir karenin bir kenarı kaç birimdir?

Kenarı = $\sqrt{25} = 5$ birimdir.

ÖRNEK: 18 adet birim karoya en az kaç tane daha eklenirse bir kare oluşur?

18'den büyük en küçük tam kare sayısı 25 olduğu için:

$25 - 18 = 7$ tane daha birim karo eklenmelidir.

Bir sayının hangi sayının karesi olduğunu bulmak için çarpanlarına ayırabiliriz.



ÖRNEK: $\sqrt{196}$ sayısının değerini bulalım.

$$\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} 196 \\ 98 \\ 49 \\ 7 \\ 1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 196 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \\ 196 = 2^2 \cdot 7^2 \\ 196 = 14^2 \text{ olduğu için} \\ \sqrt{196} = 14 \text{ t'ür.} \end{array}$$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI
+	İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI
	TEST ÇÖZME BAĞLANTISI

+

+

KONU KAZANIMLARI

← ÖNCEKİ KONU

SONRAKİ KONU →

Bilimsel Gösterim

Tam Kare Olmayan Sayıların Karekökleri

Tam Kare Olmayan Sayıların Karekökleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Tam Kare Olmayan Sayılar
- √ Yaklaşık Değer Bulma
- √ Karekökünü Tahmin Etme



Bu konuya başlamadan önce Kareköklü Sayılar ve Tam Kare Sayılar Konu Anlatımı sayfamıza bir göz atıp tekrar etmeniz faydalı olacaktır.

TAM KARE OLMAYAN SAYILAR

1,4,9,16,25,... gibi sayılara tam kare sayılar denildiğini öğrenmiştik. Bu sayılar dışındaki sayılara tam kare olmayan sayılar diyoruz. Bu konumuzda tam kare olmayan sayıların kareköklerinin hangi sayılar arasında olduğunu bulmayı ve tam kare olmayan sayıların yaklaşık değerini en yakın onda birliğe kadar tahmin etme yöntemini öğreneceğiz.

HANGİ İKİ SAYI ARASINDA

Tam kare sayıların karekökleri doğal sayıdır. Ancak tam kare olmayan sayıların karekökleri ne bir doğal sayıdır, ne bir tam sayıdır, ne de bir rasyonel sayıdır. Bu sayılara irrasyonel sayılar denildiğini daha sonra öğreneceğiz. Şimdi tam kare olmayan sayıların karekökleri hangi sayılar arasında yer alır bulalım.

Tam kare olmayan sayıların kareköklerinin hangi sayılar arasında olduğunu bulmak için sayının hangi tam kare sayılar arasında olduğunu buluruz. Sayının karekökü bu tam kare sayıların karekökleri olan sayılar arasındadır.



ÖRNEK: $\sqrt{8}$ sayısının hangi iki tam sayı arasında olduğunu bulalım.

8'ye en yakın 8'den büyük ve 8'den küçük tam kare sayıları buluruz.

8'den küçük 8'e en yakın tam kare sayı = 4

8'den büyük 8'e en yakın tam kare sayı = 9'dur.

$\sqrt{8}$ 'nin değeri bu tam kare sayıların karekökleri arasındadır.

$$4 < 8 < 9$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9} \text{ yazılır.}$$

$$2 < \sqrt{8} < 3$$

$\sqrt{8}$ 'nin değeri 2 ile 3 arasındadır.

ÖRNEK: Alanı 77 cm² olan karenin bir kenar uzunluğu hangi tam sayılar arasındadır?

Alanı verilen bir karenin kenar uzunluğunu bulmak için alanının karekökünü bulmalıyız.

$$64 < 77 < 81$$

$$\sqrt{64} < \sqrt{77} < \sqrt{81} \text{ olur.}$$

$$8 < \sqrt{77} < 9$$

Bu karenin bir kenarının uzunluğu 8 ile 9 arasında bir sayıdır.

KAREKÖKLÜ BİR SAYININ YAKLAŞIK DEĞERİNİ TAHMİN ETME

Tam kare olmayan bir sayının karekökünün hangi sayılar arasında olduğunu bulduk. Şimdi ise biraz daha yakın bir tahmin yapmayı bir örnekle öğrenebiliriz.

ÖRNEK: $\sqrt{77}$ sayısının yaklaşık değerini tahmin edelim.

$\sqrt{77}$ 'nin 8 ile 9 arasında olduğunu bulmuştuk.

$\sqrt{77}$ 'nin 8'e mi 9'a mı daha yakın olduğunu bulalım:

77 sayısı 81'e 64'ten daha yakın olduğu için

$\sqrt{77}$ 'nin 9'a daha yakın olduğunu da söyleyebiliriz.

Şimdi ise tahminimizi onda birler basamağına kadar geliştirelim. Bu işlemi sayı doğrusunda temsil ederek anlatalım.

Kesirler konusunda öğrendiğimiz bilgilere dayanarak $\sqrt{77}$ 'nin 8 ile 9 arasındaki yerini yaklaşık olarak $8\frac{13}{17}$ tahmin ederiz.

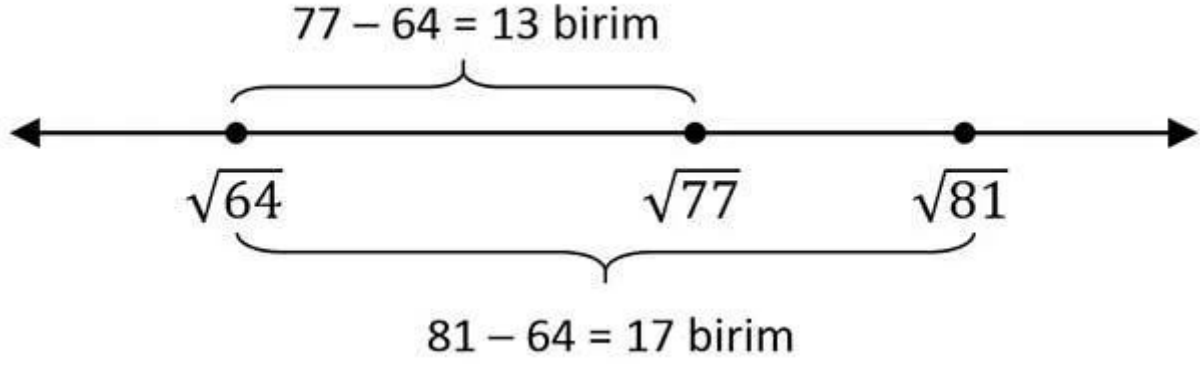
Bu kesirde paya 77-64=13 yazdık, paydaya ise 81-64=17 yazdık.

Şimdi ise bu kesri ondalık kesre çevirmek için 13'ü 17'ye böleriz.

Tahminimizi onda birler basamağına kadar yapacağımız için virgülden sonra bir basamak bulmamız yeterli.

Bu yöntem ile $\sqrt{77}$ 'nin yaklaşık değerini 8,7 olarak tahmin ettik.

$\sqrt{77}$ 'nin gerçek değeri ise = **8,774964387392122060406388307416...**



$$\sqrt{77} \sim 8 \frac{13}{17}$$

$$\begin{array}{r|l} 130 & 17 \\ - 119 & \hline & 0,7 \end{array}$$

$\sqrt{77} \sim 8,7$ olarak tahmin edebiliriz.

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI
+	İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI
+	TEST ÇÖZME BAĞLANTISI
+	KONU KAZANIMLARI

← ÖNCEKİ KONU	SONRAKİ KONU →
Kareköklü Sayılara Giriş ve Tam Kare Sayılar	Kareköklü Bir Sayıyı $a\sqrt{b}$ Şeklinde Yazma

Kareköklü Bir Sayıyı $a\sqrt{b}$ Şeklinde Yazma

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Tam Kare Olmayan Sayılar
- √ $a\sqrt{b}$ Şeklinde Yazmak
- √ Karekök Dışına Çıkarmak



KAREKÖKTEN SAYI NASIL ÇIKARILIR?

Tam kare sayıları karekökten çıkarmayı Kareköklü Sayılar ve Tam Kare Sayılar konusunda anlatmıştık. Şimdi ise tam kare olmayan sayıların çarpanlarını kökten çıkarmayı öğreneceğiz.

Kareköklü bir sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazmak için karekök içindeki sayı çarpanlarından en büyük birisi tam kare sayı olacak şekilde iki sayının çarpımı olarak yazılır. Tam kare olan çarpanın karekökleri, karekök dışına katsayı olarak yazılır.
 $a \geq 0$ olmak üzere $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ eşitliği vardır.



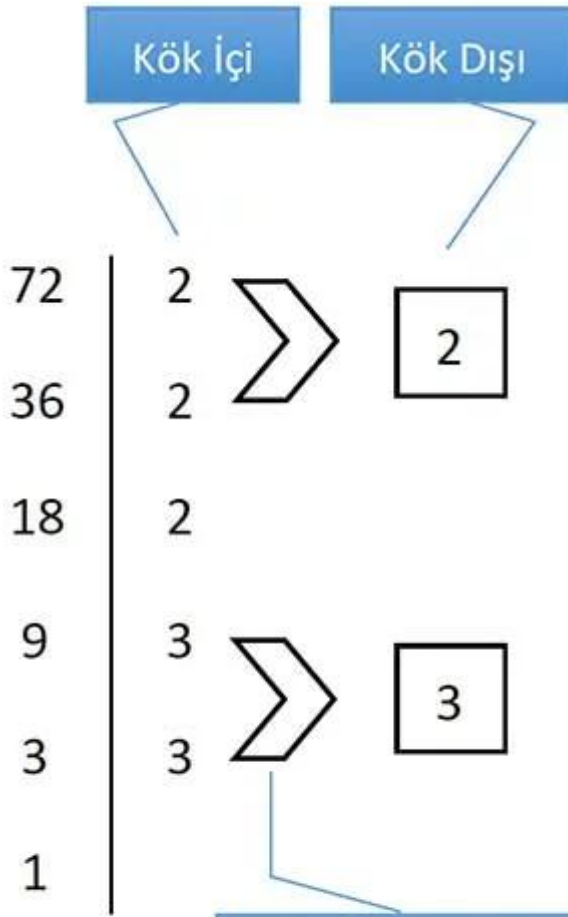
Karekök içindeki sayının çarpanlarından hiçbiri tam kare sayı değilse karekök dışına çıkarılamaz.

ÖRNEK: $\sqrt{72}$ sayısını $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım. Bu işlemi 2 farklı yolla yapabiliriz.

1. YOL: 72'yi birisi tam kare olmak şartıyla iki sayının çarpımı şeklinde kökün içine yazarız.

Tam kare olan çarpan kök dışına çıkartılır. Diğer çarpanın 1'den büyük tam kare çarpanı yoksa kök içinde kalır.

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$



$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$72 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2$$

$$72 = 2 \cdot 6^2 \text{ olduğu için}$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ 'dir.}$$

Çift olan 2 ve 3 kök dışına çıkar ve çarpılır, yalnız kalan 2 kök içinde kalır.

ÖRNEK: Aşağıdaki kareköklü sayıları $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

► $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

► $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

► $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

► $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$

► $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$

KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+ İLGİLİ ÇALIŞMA KAĞIDI BAĞLANTISI

+ İLGİLİ KAZANIM TESTİ BAĞLANTISI

TEST ÇÖZME BAĞLANTISI



KONU KAZANIMLARI

← ÖNCEKİ KONU

Tam Kare Olmayan Sayıların Karekökleri

SONRAKİ KONU →

Kareköklü Sayılarda Katsayıyı Kök İçine Alma

Kareköklü Sayılarda Katsayıyı Kök İçine Alma

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

$\sqrt{a \cdot b}$ Şeklinde Sayılarda Katsayıyı Kök İçine Alma

KATSAYI NASIL KAREKÖK İÇİNE ALINIR?

Kareköklü bir sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazmayı anlatmıştık. Şimdi ise katsayı kök içine nasıl alınır öğreneceğiz.

Katsayı karekök içine alınırken katsayının karesi alınarak (kendisi ile çarpılarak) kök içindeki sayı ile çarpılır ve kök içine yazılır.

$a \geq 0$ olmak üzere $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$ eşitliği vardır.

ÖRNEK: $2\sqrt{3}$ sayısında katsayıyı kök içine alalım.

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12} \text{ olur.}$$

ÖRNEK: Aşağıdaki kareköklü sayılarda katsayıyı kök içine alalım.

$$\blacktriangleright 3\sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{27}$$

$$\blacktriangleright 4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$$

$$\blacktriangleright 7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$$

$$\blacktriangleright 12 = \sqrt{12^2} = \sqrt{144}$$

$$\blacktriangleright \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 8} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

Karekök dışındaki sayı negatif ise “-” kök dışında bırakılır.

ÖRNEK: $-2\sqrt{5}$ sayısında katsayıyı kök içine alalım.

$$-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{4 \cdot 5} = -\sqrt{20} \text{ bulunur.}$$

Katsayıyı karekök içine alma konusu Kareköklü Sayılarda Sıralama konusunda sıklıkla kullanacağız.

--	--

--	--

--	--

--	--

Kareköklü Sayılarda Sıralama

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Kareköklü Sayıları Karşılaştırma Nasıl Yapılır?
- √ Kareköklü Sayılarda Sıralama Nasıl Yapılır?

KAREKÖKLÜ SAYILARDA SIRALAMA

Bu konudan önce Kareköklü Sayılarda Katsayıyı Kök İçine Alma konusunu tekrar etmenizi tavsiye ederiz.

Kareköklü sayılarda sıralama yapmak için katsayılar kök içine alınır. Sonra kök içindeki sayılar karşılaştırılır.

$x > y > z$ ise $\sqrt{x} > \sqrt{y} > \sqrt{z}$ eşitliği vardır.

ÖRNEK: $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{11}$ sayılarını karşılaştıralım.

Sıralayacağımız sayılardaki katsayıları köklerin içine alalım.

$$\blacktriangleright 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$\blacktriangleright 4\sqrt{2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$$

$$\blacktriangleright 2\sqrt{11} = \sqrt{2^2 \cdot 11} = \sqrt{4 \cdot 11} = \sqrt{44}$$

Bu işlemden sonra kökün içlerindeki sayılara bakarak sıralama yaparız.

$\sqrt{45} > \sqrt{44} > \sqrt{32}$ olduğu için $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11} > 4\sqrt{2}$ 'dir.

ÖRNEK: $2\sqrt{5} < A < 9\sqrt{3}$ eşitsizliğinde A'nın alabileceği değerleri bulalım.

$2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ olduğu için A sayısı $\sqrt{20}$ ile $\sqrt{243}$ arasında değer alabilir.
 $9\sqrt{3} = \sqrt{243}$

Kareköklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

√ Kareköklü Sayılarda Toplama İşlemi

√ Kareköklü Sayılarda Çıkarma İşlemi

KAREKÖKLÜ SAYILARLA TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ NASIL YAPILIR?

Kareköklü bir sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazmayı anlatmıştık. Bu konuda bu bilgiden de faydalanarak Kareköklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi nasıl yapılır öğreneceğiz.

Kareköklü sayılarla toplama ve çıkarma işlemi yaparken, kök içleri aynı olan terimler kendi aralarında toplanır veya çıkarılır. Katsayılar arasında işlem yapılır ve bulunan sonuç ortak köke katsayı olarak yazılır.

► Toplama işlemi için $a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a + b)\sqrt{x}$ eşitliği,

► Çıkarma işlemi için ise $a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a - b)\sqrt{x}$ eşitliği yazılabilir.

ÖRNEK: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ işlemini yapalım.

Köklerin içlerindeki sayı aynı olduğundan toplama işlemi yapabiliriz.

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Başında katsayı bulunmayan kareköklü sayıların katsayıları 1'dir.

ÖRNEK: Bir kenarının uzunluğu $\sqrt{7}$ cm olan eşkenar üçgenin çevresini bulalım.

$$\text{Çevre} = \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} = (1 + 1 + 1)\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

ÖRNEK: $9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$9\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (9 - 3)\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \text{ bulunur.}$$

Toplama ve çıkarma aynı anda da yapılabilir.

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} - c\sqrt{x} = (a + b - c)\sqrt{x}$$

Karekök içindeki sayılar aynı değilse ve çarpanlarından tam kare sayı olanlar varsa kök dışına çıkarırız. ($a\sqrt{b}$ şeklinde yazarız) Bu işlem sonucunda karekök içlerindeki sayılar aynı olabilir.

ÖRNEK: $\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{48}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$= 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$$

$$= (5 + 2 - 4)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

bulunur.

Kök içleri aynı olmayan/yapılamayan sayılarla toplama çıkarma işlemi yapılmaz.

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$$

ÖRNEK: $-2\sqrt{50} + 3\sqrt{45} - 4\sqrt{98} + 5\sqrt{20}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$-2\sqrt{50} + 3\sqrt{45} - 4\sqrt{98} + 5\sqrt{20}$$

$$= -2\sqrt{25 \cdot 2} + 3\sqrt{9 \cdot 5} - 4\sqrt{49 \cdot 2} + 5\sqrt{4 \cdot 5}$$

$$= -10\sqrt{2} + 9\sqrt{5} - 28\sqrt{2} + 10\sqrt{5}$$

$$= -38\sqrt{2} + 19\sqrt{5}$$

İşlemin sonucu yukarıdaki ifadedir. Daha fazla işlem yapılamaz.

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

Kareköklü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Kareköklü Sayılarda Çarpma İşlemi
- √ Kareköklü Sayılarda Bölme İşlemi

Kareköklü bir sayıyı $a\sqrt{b}$ şeklinde yazmayı anlatmıştık. Bu konuda bu bilgiden de faydalanarak Kareköklü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi nasıl yapılır öğreneceğiz.

KAREKÖKLÜ SAYILARLA ÇARPMA İŞLEMİ NASIL YAPILIR?

Kareköklü sayılarla çarpma işlemi yapılırken varsa katsayılar çarpılarak sonuca katsayı olarak yazılır. Kök içindeki sayılar çarpılarak sonuçta kök içinde yazılır ve kök dışına çıkarma işlemi yapılır. $x\sqrt{a} \cdot y\sqrt{b} = x \cdot y\sqrt{a \cdot b}$

ÖRNEK: $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}$ işleminin sonucunu bulalım.

Katsayıları kendi arasında kök içindeki sayıları kendi arasında çarpalım.

$$4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4 \cdot 2\sqrt{3 \cdot 2} = 8\sqrt{6} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK: $-3\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{14}$ işleminin sonucunu bulalım.

Katsayıları kendi arasında kök içindeki sayıları kendi arasında çarpalım. Kök içinden kök dışına çıkarma işlemi yapılabilir.

$$-3\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{14} = -3 \cdot 5\sqrt{7 \cdot 14} = -15\sqrt{98} = -15\sqrt{49 \cdot 2} = -15 \cdot 7\sqrt{2} = -105\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK: $4\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$ işleminin sonucunu bulalım.

Başında katsayı yazmayan köklü ifadenin katsayısı 1'dir. Karekök içinin aynı olduğu durumlarda köklü sayı direk kök dışına çıkartılabilir.

$$4 \cdot 1\sqrt{6 \cdot 6} = 4\sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ bulunur.}$$

Karekök içinin aynı olduğu durumlarda köklü sayı direk kök dışına çıkartılabilir.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

ÖRNEK: Kısa kenarını uzunluğu $3\sqrt{2}$ cm, uzun kenarının uzunluğu $7\sqrt{3}$ cm olan dikdörtgenin alanı kaç cm^2 'dir?

Dikdörtgenin alanı kenar uzunlukları çarpılarak bulunur.

$$3 \cdot 7\sqrt{2 \cdot 3} = 21\sqrt{6} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

KAREKÖKLÜ SAYILARLA BÖLME İŞLEMİ NASIL YAPILIR?

Kareköklü sayılarla bölme işlemi yapılırken varsa katsayılar bölünerek bölüme katsayı olarak yazılır. Sonra kök içindeki sayıların aynı kök içinde yazılır ve bölme işlemi yapılır.

$$\frac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}} = \frac{x}{y} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ÖRNEK: $\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Katsayıları kendi arasında kök içindeki sayıları kendi arasında böleriz.

$$\frac{4}{2} \sqrt{\frac{6}{3}} = 2\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}}$ işleminin sonucunu bulalım.

Ortak kök içine yazarız ve 5 ile sadeleştirme yaparız.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} = \sqrt{\frac{5}{125}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} \text{ olur.}$$

ÖRNEK: Alanı $20\sqrt{15}$ cm^2 olan dikdörtgenin bir kenarı $2\sqrt{5}$ cm ise diğer kenarı kaç cm'dir?

Alan iki kenarın çarpımı ile bulunur. Bir kenarı verildiyse alanını bu kenar uzunluğuna bölerek diğer kenarı bulunur.

$$\frac{20\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = 10\sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

--	--

--	--

Ondalık Kesirlerin Karekökleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Ondalık Kesirlerin Karekökünü Bulma
- √ Rasyonel Sayıların Karekökleri Hesaplama

ONDALIK KESİRLERİN KAREKÖKLERİ NASIL BULUNUR?

Ondalık kesirlerin karekökünü bulma konusuna geçmeden önce ondalık kesirleri rasyonel gösterimle yazma konusunu bir hatırlayalım.

ÖRNEK: 1,44 sayısını kesir olarak yazalım.

Tam kısmı (virgülden önceki kısım) kesrin tam kısmına,

Ondalık kısmındaki sayıyı (virgülden sonraki kısım) kesrin payına,

1 ve yanına virgülden sonraki basamak kadar sıfırı kesrin paydasına yazarız: $1 \frac{44}{100}$

Şimdi ise kesirli bir sayıyı ondalıklı gösterimle nasıl gösteririz hatırlayalım.

ÖRNEK: $\frac{121}{100}$ kesrini ondalıklı gösterimle yazalım.

Paydadaki 2 tane sıfır virgülden sonra 2 basamak olacağı anlamına gelir.

_, _ _ şeklinde. Daha sonra payda bulunan sayıyı sağa yaslı olarak yazarız.

Eğer solda boş basamak kalırsa o basamaklara "0" koyarız.

Kesrin ondalık gösterimi = 1,21'dir.

Şimdi ondalık kesirlerin karekökünü almaya geçebiliriz.

Ondalık kesirler, rasyonel sayıya çevrildikten sonra karekök dışına çıkartılabilir.

ÖRNEK: $\sqrt{0,25}$ sayısının değerini bulalım.

Önce kesir olarak yazarız, daha sonra pay ve paydayı ayrı ayrı karekök dışına çıkartırız.

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ olur.}$$

ÖRNEK: $\sqrt{0,04}$ sayısının değerini bulalım.

Önce kesir olarak yazarız, daha sonra pay ve paydayı ayrı ayrı karekök dışına çıkartırız.

$$\sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK: $\sqrt{0,0009}$ sayısının değerini bulalım.

Önce kesir olarak yazarız, daha sonra pay ve paydayı ayrı ayrı karekök dışına çıkartırız.

$$\sqrt{0,0009} = \sqrt{\frac{9}{10000}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10000}} = \frac{3}{100} = 0,03 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK: $\frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{1,69}}{\sqrt{2,56}}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\frac{\sqrt{\frac{121}{100}} - \sqrt{\frac{169}{100}}}{\sqrt{\frac{256}{100}}} = \frac{\frac{11}{10} - \frac{13}{10}}{\frac{16}{10}} = \frac{-2}{\frac{16}{10}} = \frac{-2}{10} \cdot \frac{10}{16} = -\frac{1}{8} \text{ olarak bulunur.}$$

--	--

--	--

--	--

--	--

Gerçek Sayılar

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Rasyonel Sayılar
- √ İrrasyonel Sayılar
- √ Gerçek Sayılar

RASYONEL SAYI NEDİR?

Payda sıfır olmamak şartıyla iki tam sayının birbirine oranı şeklinde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir. Rasyonel sayılar kümesi "Q" harfi ile gösterilir. (Rasyonel sayılar İtalyanca "quotient" kelimesinin baş harfi olarak Q işareti ile gösterilir.)

Rasyonel sayılar $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardan oluşur. Burada b sayısı sıfırdan farklıdır. Yani Doğal Sayılar (N), Tamsayılar (Z), kesirler, ondalık sayılar, devirli ondalık sayılar ve karekök alma işleminde karekökten kurtulabilen sayılar rasyonel sayılardır.

Tüm doğal sayılar ve tam sayılar, paydalarına 1 yazılıp iki tam sayının oranı şeklinde yazılabildiği için rasyonel sayılardır.

ÖRNEK: $-7 = -\frac{7}{1}$

Tüm kesirler rasyonel sayılardır.

ÖRNEK: $-1\frac{3}{5} = -\frac{8}{5}$

Ondalıklı sayılar ve devirli ondalıklı sayılar kesir olarak yazılabildiği için rasyonel sayılardır.

ÖRNEK: $0,2 = \frac{2}{10}$ ve $1,\bar{3} = 1,33333\dots = 1\frac{3}{9} = \frac{12}{9}$

Kök alma işleminde kökten kurtulabilen sayılar rasyonel sayıdır.

ÖRNEK: $2\sqrt{9} = 2.3 = 6 = \frac{6}{1}$

RASYONEL SAYILARA ÖRNEKLER

$$1 = \frac{1}{1}$$

$$-32 = \frac{-32}{1}$$

$$0 = \frac{0}{1}$$

$$1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$0,204 = \frac{204}{1000} = \frac{51}{250}$$

$$0,122222 \dots = 0,1\bar{2} = \frac{12 - 1}{90} = \frac{11}{90}$$

$$-0,\overline{35} = \frac{-35}{99}$$

$$2,4\overline{07} = \frac{2407 - 24}{990} = \frac{2383}{990}$$

$$\sqrt{441} = \sqrt{21^2} = \frac{21}{1}$$

İRRASYONEL SAYI NEDİR?

Payda sıfır olmamak şartıyla iki tam sayının birbirine oranı şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir. İrrasyonel sayılar kümesi "I" harfi ile gösterilir. Karekök dışına çıkamayan köklü sayılar, virgülden sonra devirsiz olarak sonsuza kadar devam eden sayılar (π sayısı, e sayısı gibi) irrasyonel sayılara örnektir.

ÖRNEK: $\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, π , 0,3452678354..., 4,95368462..., gibi sayılar irrasyonel sayılardır.

İrrasyonel sayıların sayı doğrusunda hangi sayıların arasında yer aldığını bulmak için Kareköklü Sayıların Yaklaşık Değeri konusuna bakabilirsiniz.

GERÇEK SAYILAR (REEL SAYILAR)

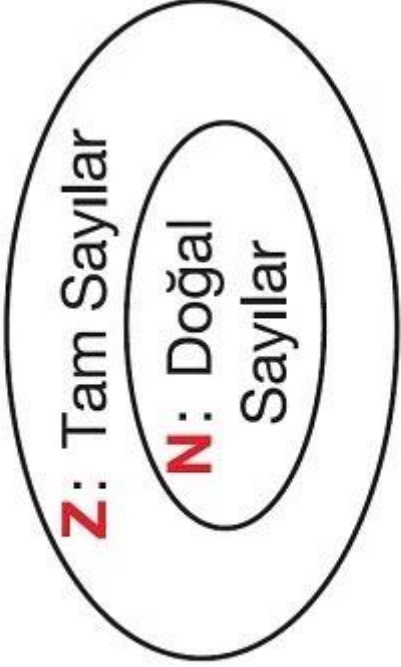
Rasyonel Sayılar ve İrrasyonel Sayıların birleşmesiyle oluşan sayı kümesine **Gerçek Sayılar** denir. Gerçek sayılara **Reel Sayılar** veya **Gerçel Sayılar** da denilir. Gerçek sayılar kümesi "R" harfi ile gösterilir.

Sayı doğrusundaki tüm noktalara karşılık gelen gerçek sayı vardır. Bu sayı rasyonel de olabilir irrasyonel de olabilir. Diğer bir ifadeyle gerçek sayılar kümesi sayı doğrusunu doldurur.

SAYI KÜMELERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ ŞEMASI

R: Gerçek Sayılar

Q: Rasyonel Sayılar



I: İrrasyonel Sayılar

www.matematikciler.org

R

Q

$\frac{3}{2}$

.1,2

Z

$\sqrt{9}$

.-2

N

.1

.26

.-9

.0

I

$\sqrt{5}$

$.1 + \sqrt{2}$

π

.-2, $\bar{3}$

www.matematikciler.org

Veri Analizi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- ✓ Üçlü Sütun Grafiği
- ✓ Üçlü Çizgi Grafiği
- ✓ Verilere Uygun Grafik Türünü Belirleme
- ✓ Grafikler Arasında Dönüşüm Yapma

SÜTUN GRAFİĞİ

Verilerin sütun halinde gösterildiği sütun grafiği özellikle veri gruplarını karşılaştırmada kullanılır. Daha önceki yıllarda öğrendiğimiz sütun grafiklerine ek olarak bu konuda üç veri grubuna ait sütun grafiklerini öğreneceğiz.

ÖRNEK: Aşağıdaki tabloya uygun sütun grafiğini çizelim.

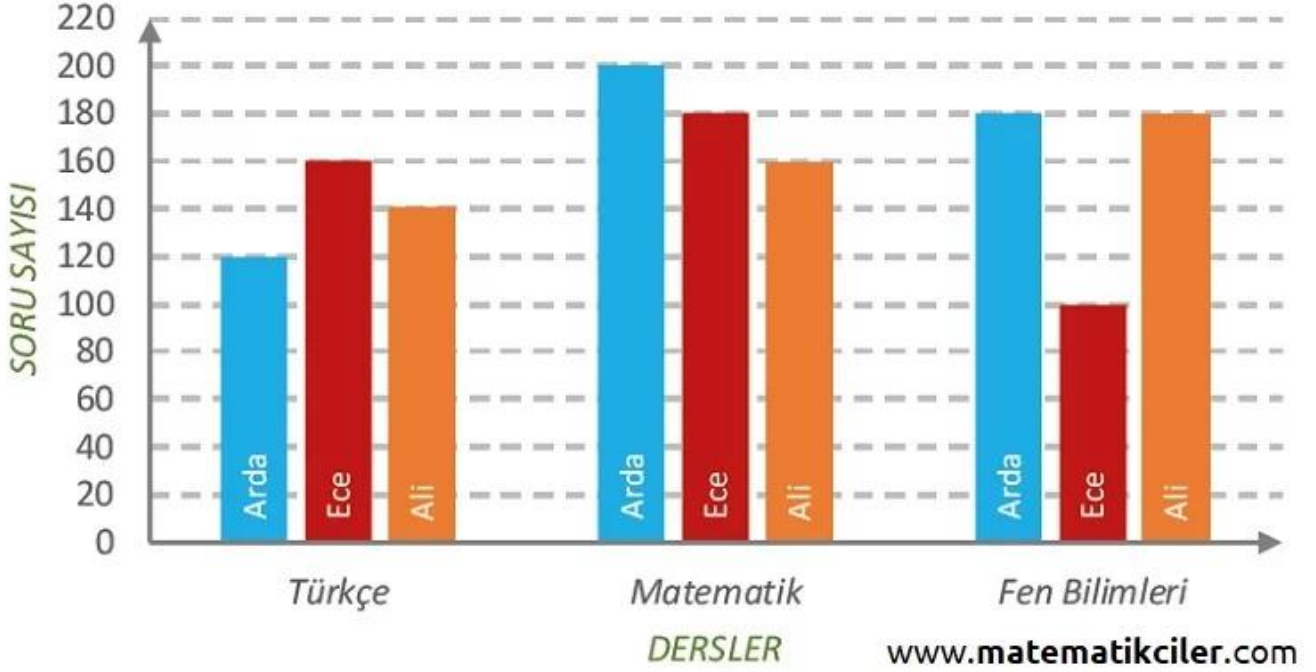
Tablo: Arda, Ece ve Ali'nin bir haftada Türkçe, Matematik ve Fen Bilimleri derslerinden çözdükleri soru sayıları

Öğrenci	Türkçe	Mat.	Fen B.
Arda	120	200	180
Ece	160	180	100
Ali	140	160	180

Grafiği oluştururken şu noktalara dikkat edilmeli:

- ✓ Grafiğe başlık verilmeli.
- ✓ Eksenlere isim verilmeli.
- ✓ Sayısal eksendeki sayılar ardışık ve eşit aralıklı olmalı.
- ✓ Sütunlar eşit genişliğe sahip olmalı.

- ✓ Farklı gruplar birbirinden ayırt edilebilir olmalı.



Grafik: Arda, Ece ve Ali'nin bir haftada Türkçe, Matematik ve Fen Bilimleri derslerinden çözdükleri soru sayıları

ÇİZGİ GRAFİĞİ

Verilerdeki değişimin çizgi halinde gösterildiği çizgi grafiği özellikle sürekli verilerin zamana bağlı değişimini göstermek için kullanılır. Daha önceki yıllarda öğrendiğimiz çizgi grafiklerine ek olarak bu konuda üç veri grubuna ait çizgi grafiklerini öğreneceğiz.

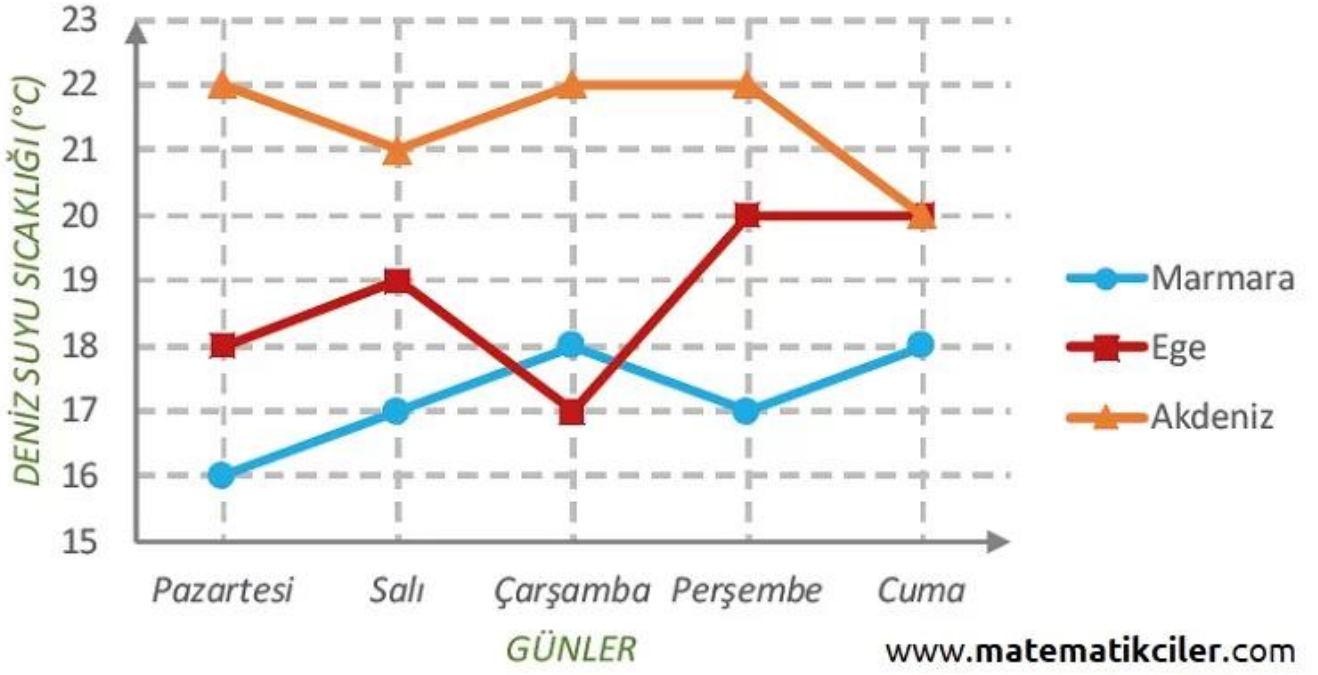
ÖRNEK: Aşağıdaki tabloya uygun çizgi grafiğini çizelim.

Tablo: Marmara, Ege ve Akdeniz'in beş günlük ortalama deniz suyu sıcaklığı (°C)

Deniz	Pt.	Sa.	Ça.	Pe.	Cu.
Marmara	16	17	18	17	18
Ege	18	19	17	20	20
Akdeniz	22	21	22	22	20

Grafiği oluştururken şu noktalara dikkat edilmeli:

- ✓ Grafiğe başlık verilmeli.
- ✓ Eksenlere isim verilmeli.
- ✓ Sayısal eksendeki sayılar ardışık ve eşit aralıklı olmalı.
- ✓ Farklı gruplar birbirinden ayırt edilebilir olmalı.



Grafik: Marmara, Ege ve Akdeniz'in beş günlük ortalama deniz suyu sıcaklığı (°C)

DAİRE GRAFIĞI

Verilerin daire dilimleri halinde gösterildiği daire grafiği özellikle bir bütünün parçalarının dağılımını göstermek için kullanılır. Daha önceki yıllarda öğrendiğimiz daire grafiğini burada bir örnekle hatırlayalım.

ÖRNEK: Aşağıda bir sınıftaki öğrencilerin en sevdiği derslerin dağılımı tablo ve daire grafiği ile gösterilmiştir. Konuyu çalışmak için daire grafiği konu anlatımı sayfamızı ziyaret edebilirsiniz.

SINIFIMIZDA EN SEVİLEN DERS	
Matematik	6
Türkçe	4
İngilizce	3
Beden Eğitimi	4
Müzik	2
Fen Bilimleri	2
Sosyal Bilgiler	3



UYGUN GRAFİK TÜRÜ BELİRLEME

Sütun grafiği özellikle farklı verileri karşılaştırmak için uygundur.

ÖRNEK: A, B ve C fabrikalarının üretim miktarlarını karşılaştırmak için sütun grafiği uygundur.

Çizgi grafiği özellikle sürekli verilerin zamana bağlı değişimini göstermek için uygundur.

ÖRNEK: Dolar ve Avronun Türk Lirası karşısındaki değerinin günlere göre değişimini göstermek için çizgi grafiği uygundur.

Daire grafiği özellikle bir bütünün parçalarının dağılımını göstermek için uygundur.

ÖRNEK: Sınıftaki öğrencilerin sevdikleri derslerin dağılımını göstermek için daire grafiği uygundur.

Grafikler arasında dönüşüm yaparken öncelikle verilen grafikteki verilerin tabloya dökülmesi, daha sonra tabloya uygun grafik çizilmesi grafik dönüştürme işlemini kolaylaştıracaktır.

Olasılık

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Deney, Çıktı, Olay Nedir?
- √ Daha Fazla, Daha Az ve Eşit Olasılıklı Olaylar
- √ Kesin ve İmkansız Olaylar
- √ Basit Olayların Olma Olasılıkları

Olasılık bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel değeri veya olabilirlik yüzdesi, değeridir. Olasılık çeşitlerine geçmeden önce **olasılık kavramlarını** öğrenelim.

OLASILIK İLE İLGİLİ TERİMLER

Olasılık ile ilgili kavramların hem tanımını verelim hem de bir örnekle inceleyelim.

ÖRNEK: Bir zarın havaya atıldığında üst yüze 4 gelme olayını inceleyelim.

DENEY: Bir olayın sonucunun ne olacağını görmek için yapılan işleme **deneysel** denir.

Bu örnekte zarın havaya atılması deneyseldir.

ÇIKTI: Bir deneyde elde edilebilecek sonuçların her birine **çıkıtı** denir.

Bu örnekte çıktılar 1,2,3,4,5 ve 6'dır.

OLASI DURUMLAR: Bir deneyin bütün çıktılarının oluşturduğu durumlara **olası durumlar** denir.

Bu örnekte 6 olası durum vardır.

OLAY: Bir deneyin çıktıları arasından belirli bir koşulu sağlayanlara **olay** denir.

Bu örnekte zarın 4 gelmesi olaydır.

DAHA FAZLA, EŞİT VE DAHA AZ OLASILIKLI OLMA

Olası durum sayıları birbirine eşit olan olaylara **eşit olasılıklı olay** denir.

Bu konuyu bir örnekle inceleyelim:

ÖRNEK: 10 kırmızı, 10 mavi ve 15 sarı misket arasından seçilen bir misketin

Kırmızı gelme olayı ile mavi gelme olayı eşit olasılıklı olay,

Mavi gelme olayı, sarı gelme olayına göre daha az olasılıklı,

Sarı gelme olayı , kırmızı gelme olayına göre daha fazla olasılıklıdır.

BİR OLAYIN OLMA OLASILIĞI

Eşit şansa sahip olaylarda her bir çıktı eş olasılıklıdır ve bu değer $\frac{1}{n}$ 'dir. Buradaki "n" olası durum sayısını temsil etmektedir.

ÖRNEK: Aşağıdaki olayların olma olasılıklarını inceleyelim.

Bir zar atıldığında 5 gelmesi olasılığı $\frac{1}{6}$

Bir madeni para atıldığında yazı gelme olasılığı $\frac{1}{2}$

Rakamlar arasından rastgele seçilen bir rakamın 3 gelme olasılığı $\frac{1}{10}$ 'dur.

Bir olayın olma olasılığı istenilen olayın çıktı sayısının tüm çıktıların sayısına bölümüdür.

$$\text{Bir Olayın Olma Olasılığı} = \frac{\text{istenilen Durum Sayısı}}{\text{Tüm Durumların Sayısı}}$$

ÖRNEK: Bir zar atıldığında:

Tek sayı (1,3,5) gelmesi olasılığı $\frac{3}{6}$

Asal sayı (2,3,5) gelmesi olasılığı $\frac{3}{6}$

3'ten küçük (1,2) sayı gelmesi olasılığı $\frac{2}{6}$

3'ten küçük (1,2) veya 4'ten büyük (5,6) sayı gelmesi olasılığı $\frac{4}{6}$ 'dır.

KESİN OLAY VE İMKANSIZ OLAYLAR

Gerçekleşme olasılığı 1 olan olaylara **kesin olay** denir.

Bir zar atıldığında 10'dan küçük (1,2,3,4,5,6) sayı gelmesi kesindir. Olasılığı $\frac{6}{6} = 1$ 'dir.

Gerçekleşme ihtimali olmayan yani olasılığı 0 olan olaylara **imkansız olay** denir.

Bir zar atıldığında 15 gelmesi imkansızdır. Olasılığı $\frac{0}{6} = 0$ 'dır.

Bir olayın olasılığı 0'dan 1'e kadar değer alabilir. Eğer imkansız bir olaysa 0, kesin bir olaysa 1, kesin veya imkansız değilse 0 ile 1 arasında bir değer alır.

--	--

--	--

--	--

--	--

Cebirsel İfadeler

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Değişken, Terim, Katsayı Nedir?
- √ Cebirsel İfadeleri Farklı Biçimde Yazma
- √ Cebirsel İfadeleri Çarpma

Öncelikle cebirsel ifadelerle ilgili temel kavramlar olan değişken, bilinmeyen nedir, cebirsel ifade nedir, katsayı nedir, terim nedir, sabit terim nedir hatırlayalım. Ayrıca bu konudan önce cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemi konusunu da tekrar etmeniz faydanıza olacaktır.

CEBİRSEL İFADELER

CEBİRSEL İFADE VE BİLİNMEYEN NEDİR?

En az bir bilinmeyen ve bir işlem içeren ifadelere **cebirsel ifadeler** denir. Cebirsel ifadelerde sayıları temsil eden harflere **değişken** ya da **bilinmeyen** denir.

ÖRNEK: Bir sayının 2 katının 3 fazlası ifadesini cebirsel ifade olarak yazalım.

Cebirsel ifademiz: $2x + 3$ olur. Bu cebirsel ifadede "x" bilinmeyendir.

TERİM VE KATSAYI NEDİR?

Bir cebirsel ifadede bir sayı ile bir veya birden fazla değişkenin çarpımına **terim** denir. Terimlerde çarpım durumunda bulunan sayıya **katsayı** denir.

ÖRNEK: $5x$ ifadesinde x bilinmeyen, 5 ise katsayıdır.

Terimleri birbirinden ayırmak için "+" ve "-" sembollerinin önünden ifadeyi böleriz. Her parça bir terimdir.



ÖRNEK: $5x + 2y - 7$ ifadesini inceleyelim.

$5x + 2y - 2$ ifadesini "+" ve "-" işaretlerinin önünden bölersek terimleri elde ederiz.

$5x / + 2y / - 7$ ifadesi 3 terimlidir. Terimleri $5x$, $2y$ ve -7 'dir

SABİT TERİM NEDİR?

İçerisinde değişken bulunmayan terime **sabit terim** denir.

ÖRNEK: $6y + 12$ ve $-3x - 9$ ifadelerinde sabit terimleri bulalım.

$6y + 12$ cebirsel ifadesinde sabit terim $+12$ 'dir.

$-3x - 9$ cebirsel ifadesinde sabit terim -9 'dur.

Sabit terim de bir katsayıdır.

$5x^2 - 7$ cebirsel ifadesinde kat sayılar 5 ve -7 'dir.

CEBİRSEL İFADELERDE ÇARPMA İŞLEMİ

Cebirsel ifadelerle çarpma işlemi yapılırken çarpanlardan birindeki her bir terim ile diğerindeki her bir terim ayrı ayrı çarpılır. Elde edilen sonuçta benzer terimler varsa bunlar arasında toplama çıkarma işlemi yapılarak sadeleştirme yapılır.

1 Terimli ile 1 Terimli Cebirsel İfadeyi Çarpma

Katsayılar çarpılıp katsayı olarak, bilinmeyenler çarpılıp bilinmeyen olarak sonuca yazılır.

ÖRNEK: 6 ifadesi ile $2x$ ifadesini çarpalım.

6 ile $2x$ 'in katsayısı (2) çarpılır. $6 \cdot 2 = 12$

Bilinmeyen olarak sadece x olduğu için sonuç $12x$ bulunur.

ÖRNEK: $3x$ ifadesi ile $5x$ ifadesini çarpalım.

$3x$ 'in katsayısı (3) ile $5x$ 'in katsayısı (5) çarpılır. $3 \cdot 5 = 15$

$3x$ 'teki bilinmeyen (x) ile $5x$ 'teki bilinmeyen (x) çarpılır. $x \cdot x = x^2$

$$\text{Sonuç: } 3x \cdot 5x = 15x^2$$

ÖRNEK: $-4x$ ile $2y$ 'i çarpalım

$$\text{Katsayılar çarpımı: } -4 \cdot 2 = -8$$

$$\text{Bilinmeyenler çarpımı: } x \cdot y = xy$$

$$-4x \cdot 2y = -8xy$$

1 Terimli ile 2 Terimli Cebirsel İfadeyi Çarpma

Bir terimdeki terim diğer iki terimle sırayla çarpılır ve en son varsa sadeleştirme yapılır.

ÖRNEK: $5 \cdot (7x + 2y)$ işlemini yapalım.

Tek terimli 5, diğer iki terimle ayrı ayrı çarpılır. (Dağılma Özelliği)

$$= 5 \cdot 7x + 5 \cdot 2y$$

$$= 35x + 10y$$

ÖRNEK: $-2x \cdot (x + 3)$ işleminde de aynı şekilde x ve $+3$ 'ü sırayla $-2x$ ile çarpalım.

$$= (-2x \cdot x) + (-2x \cdot 3)$$

$$= (-2x^2) + (-6x)$$

2 Terimli ile 2 Terimli Cebirsel İfadeyi Çarpma

İlk çarpandaki her bir terim ile ikinci çarpandaki her bir terim ayrı ayrı çarpılır. Sonra sadeleştirme varsa yapılır.

ÖRNEK: $(2x + 3) \cdot (4x + 1)$ işlemini yapalım.

İlk ifadedeki $2x$ 'i diğer ifadedeki $4x$ ve $+1$ ile ayrı ayrı çarpacağız.

Benzer şekilde ilk ifadedeki $+3$ 'ü diğer ifadedeki $4x$ ve $+1$ ayrı ayrı çarpacağız.

$$= (2x \cdot 4x) + (2x \cdot 1) + (3 \cdot 4x) + (3 \cdot 1)$$

$$= 8x^2 + 2x + 12x + 3 \text{ [} 2x \text{ ile } 12x \text{ toplanır]}$$

$$= 8x^2 + 14x + 3$$

ÖRNEK: $(x - 1)^2$ işlemini yapalım.

$(x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (x - 1)$ demektir.

Önce ilk ifadedeki x ile diğer ifadedeki x ve -1 çarpılır.

Sonra ilk ifadedeki -1 ile diğer ifadedeki x ve -1 çarpılır.

$$= (x \cdot x) + (x \cdot -1) + (-1 \cdot x) + (-1 \cdot -1)$$

$$= x^2 + (-x) + (-x) + 1 \text{ [-x ile -x toplanır]}$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

--	--

--	--

--	--

--	--

Özdeşlikler ve Özdeşlik Modelleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Özdeşlik Nedir?
- √ Özdeşlik ile Denklem Arasındaki Fark Nedir?
- √ Önemli Özdeşlikler
- √ Özdeşlik Modelleri

ÖZDEŞLİK NEDİR?

İçindeki değişkenlere verilen bütün gerçel sayılar için doğru olan denklemlere **özdeşlik** denir.

ÖZDEŞLİK Mİ DENKLEM Mİ?

Özdeşlik mi denklem mi demek aslında kafaları karıştıran bir ifade çünkü özdeşlikler de aynı zamanda denklemdir. "Özdeşlik mi? Özdeşlik değil mi?" sorusu daha uygun bir soru olabilir. Özdeşlik ile denklem arasındaki fark; özdeşlikte değişkene verilen her gerçel sayı değerinde eşitlik sağlanır, denklemde ise bazı gerçel sayı değerlerinde eşitlik sağlanır.(Buradaki denklemden kasıt özdeşlik olmayan denklemdir.)

ÖRNEK: $2.(x - 2) = 2x - 4$ ve $2.(x - 2) = 4$ eşitliklerinde x yerine farklı değerler vererek eşitliğin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

x yerine her iki eşitlikte de 1 yazalım

$$2.(x - 2) = 2x - 4$$

$$2.(1 - 2) = 2.1 - 4$$

$$-2 = -2$$

$$2.(x - 2) = 4$$

$$2.(1 - 2) = 4$$

$$-2 \neq 4$$

x yerine her iki eşitlikte de 2 yazalım

$$2.(x - 2) = 2x - 4$$

$$2.(2 - 2) = 2.2 - 4$$

$$0 = 0$$

$$2.(x - 2) = 4$$

$$2.(2 - 2) = 4$$

$$0 \neq 4$$

x yerine her iki eşitlikte de 4 yazalım

$$2.(x - 2) = 2x - 4$$

$$2.(4 - 2) = 2.4 - 4$$

$$4 = 4$$

$$2.(x - 2) = 4$$

$$2.(4 - 2) = 4$$

$$4 = 4$$

Görüldüğü gibi soldaki eşitlik x yerine yazdığımız üç değer için de sağlandı. Sağdaki eşitlik ise x yerine sadece 4 yazdığımızda sağlandı. Bu yüzden: $2.(x - 2) = 2x - 4$ bir özdeşlikti, $2.(x - 2) = 4$ özdeşlik değildir.

Bir eşitliğin özdeşlik olup olmadığını anlamak için farklı değerler verip eşitliğin sağlanıp sağlanmadığına bakılabilir. Eğer verilen tüm değerler için sağlamıyorsa özdeşlik değildir.

Bir eşitliğin özdeşlik mi denklem mi olduğunun ikinci yolu ise denklemini çözmektir. Eğer denklemini çözdükten sonra $0=0$ çıkıyorsa bu denklem bir özdeşliktir.

ÖRNEK: $3x - 5 = x + 3$ ve $2x + 2 = 2 + 2x$ eşitliklerinden özdeşlik olanlarını belirleyelim.

Önce ilk denklemini çözelim.

$$3x - 5 = x + 3$$

$$3x - x = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

İlk eşitlik özdeşlik değildir. (Sadece $x=4$ için eşitlik sağlanır.)

Şimdi ikinci denklemini çözelim.

$$2x + 2 = 2 + 2x$$

$$2x - 2x = 2 - 2$$

$$0 = 0$$

İkinci eşitlik bir özdeşliktir. (x 'in her değeri için eşitlik sağlanır.)

ÖNEMLİ ÖZDEŞLİKLER

TAM KARE ÖZDEŞLİĞİ - İKİ TERİMİN TOPLAMININ KARESİ

İki terimin toplamının karesi, bu iki terimin kareleri ve bu iki terimin çarpımının iki katının toplamına eşittir.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ÖRNEK: Bu özdeşliği şu şekilde kullanabiliriz. 102'nin karesini bu özdeşlik sayesinde şu şekilde bulabiliriz.

$$(100 + 2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2$$

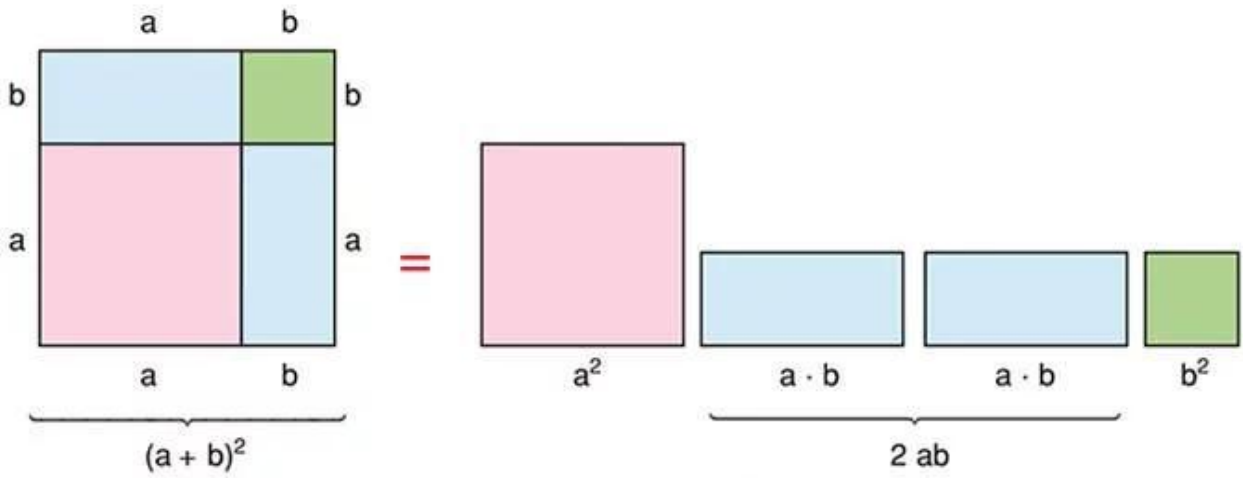
$$(100 + 2)^2 = 10000 + 400 + 4$$

$$(100 + 2)^2 = 10404$$

TAM KARE ÖZDEŞLİĞİ - İKİ TERİMİN TOPLAMININ KARESİNİ MODELLEME

Birinci şekildeki karenin alanı, parçaların alanları toplamına eşittir.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ özdeşliği}$$



www.matematikciler.org

TAM KARE ÖZDEŞLİĞİ - İKİ TERİMİN FARKININ KARESİ

İki terimin farkının karesi, bu iki terimin kareleri toplamından bu iki terimin çarpımının iki katının çıkarılmasına eşittir.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ÖRNEK: Bu özdeşliği şu şekilde kullanabiliriz. 97'nin karesini bu özdeşlik sayesinde şu şekilde bulabiliriz.

$$(100 - 3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2$$

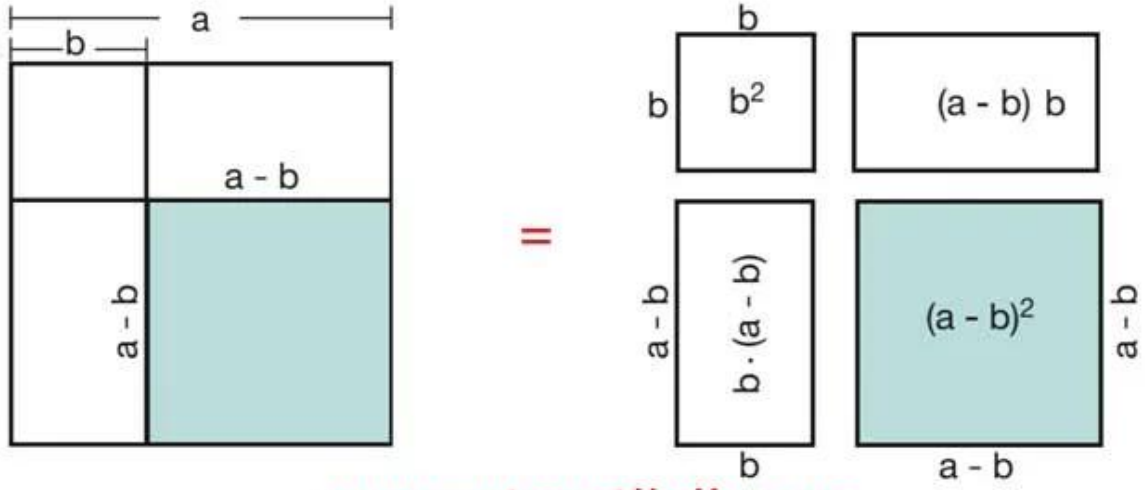
$$(100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9$$

$$(100 - 3)^2 = 9409$$

TAM KARE ÖZDEŞLİĞİ - İKİ TERİMİN FARKININ KARESİNİ MODELLEME

Birinci şekildeki yeşil karenin alanı, büyük karenin alanından beyaz bölgelerin alanlarının çıkarılmasına eşittir.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ özdeşliği



İKİ KARE FARKI ÖZDEŞLİĞİ

İki terimin karelerinin farkı, bu iki terimin toplamı ile farkının çarpımına eşittir.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

ÖRNEK: Bu özdeşliği şu şekilde kullanabiliriz. 75'in karesi ile 25'in karesinin farkını bu özdeşlik sayesinde şu şekilde bulabiliriz.

$$75^2 - 25^2 = (75 - 25) \cdot (75 + 25)$$

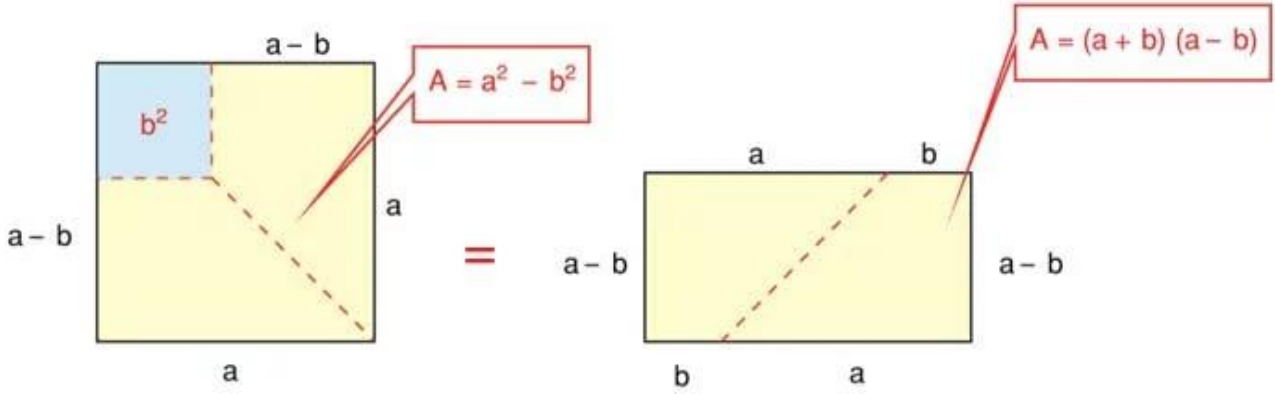
$$75^2 - 25^2 = 50 \cdot 100$$

$$75^2 - 25^2 = 5000$$

İKİ KARE FARKI MODELLEME

Birinci şekildeki büyük kareyle küçük karenin alanları farkı (sarı bölge), ikinci şekildeki sarı bölgeye eşittir.

$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ özdeşliği



www.matematikciler.org

BİR KAÇ ÖNEMLİ ÖZDEŞLİK

- İKİ KARE FARKI

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

- İKİ KARE TOPLAMI

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

- TAM KARE İFADELER

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

- İKİ KÜP FARKI

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab \cdot (a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab \cdot (a + b)$$

• **KÜP AÇILIMI**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

--	--

--	--

--	--

--	--

Cebirsel İfadeleri Çarpanlara Ayırma

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Çarpanlara Ayırma
- √ Ortak Çarpan Parantezine Alma
- √ Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma
- √ Özdeşliklerden Faydalanarak Çarpanlara Ayırma
- √ $ax^2 + bx + c$ Şeklindeki İfadeleri Çarpanlara Ayırma

CEBİRSEL İFADELERİ ÇARPANLARA AYIRMA

Bir cebirsel ifadeyi çarpanlarının çarpımı şeklinde yazmaya, o cebirsel ifadeyi **çarpanlara ayırma** denir. Cebirsel ifadeler çarpanlara ayrılırken farklı yöntemlerden faydalanılır.

1) ORTAK ÇARPAN PARANTEZİNE ALMA

Bir cebirsel ifadeyi ortak çarpan parantezine alarak çarpanlara ayırmak istiyorsak cebirsel ifadedeki her terimde ortak olarak bulunan bir çarpan bulmalıyız. Bu ortak çarpan parantezin dışına yazılır ve parantezin içine de verilen ifadedeki terimlerin ortak çarpana bölümleri yazılır.

ÖRNEK: $3x + 6$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Bu ifade iki terimli bir ifadedir ve bu iki terimde de 3 çarpanı vardır. Ortak çarpan parantezine şu şekilde alırız:

$$3x + 6 = \underline{3}.x + \underline{3}.2 = \mathbf{3.(x + 2)}$$

ÖRNEK: $6x^2 + 4x$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

İki terimde de $2x$ çarpan olarak vardır. Bu yüzden ortak çarpan parantezine şu şekilde alınır:

$$6x^2 + 4x = \underline{2x}.3x + \underline{2x}.2 = \mathbf{2x.(3x + 2)}$$

ÖRNEK: $4x^3 + 12x^2 - 8x$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Bu üç terimli ifadede her ifadede ortak olan çarpan $4x$ 'tir.

$$4x^3 + 12x^2 - 8x = \underline{4x} \cdot x^2 + \underline{4x} \cdot 3x - 4x \cdot 2 = 4x \cdot (x^2 + 3x - 2)$$

2) GRUPLANDIRARAK ÇARPANLARA AYIRMA

Ortak çarpan parantezine alınarak çarpanlara ayırma işlemi yapılamayan durumlarda gruplandırarak çarpanlara ayırma yöntemi kullanılabilir. Bu yöntemde terimler kendi aralarında ortak çarpan bulunacak şekilde iki veya daha fazla terimden oluşan gruplara ayrılır. Daha sonra ortak çarpan parantezine alınır. Gruplandırarak çarpanlara ayırma üçten fazla terimi olan cebirsel ifadelerde kullanılır.

ÖRNEK: $ab + bc + ac + c^2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Cebirsel ifadeye baktığımızda 4 terimin hepsinin ortak bir çarpanı bulunmamaktadır. Bu ifadeyi gruplandırarak çarpanlara ayrılır. İlk iki terim b parantezine son iki terim c parantezine alınır. Sonra ortak çarpan parantezine alırız.

$$\begin{aligned} ab + bc + ac + c^2 \\ &= b \cdot a + b \cdot c + c \cdot a + c \cdot c \\ &= b \cdot (a + c) + c \cdot (a + c) \\ &= b \cdot (a + c) + c \cdot (a + c) \\ &= (a + c) \cdot (b + c) \end{aligned}$$

ÖRNEK: $4ay - 3by + 8ac - 6bc$ ifadesini çarpanlara ayıralım.

Cebirsel ifadeye baktığımızda 4 terimin hepsinin ortak bir çarpanı bulunmamaktadır. Bu ifadeyi gruplandırarak çarpanlara ayrılır. İlk iki terim y parantezine son iki terim $2c$ parantezine alınır. Sonra ortak çarpan parantezine alırız.

$$\begin{aligned} 4ay - 3by + 8ac - 6bc \\ &= y \cdot 4a - y \cdot 3b + 2c \cdot 4a - 2c \cdot 3b \\ &= y \cdot (4a - 3b) + 2c \cdot (4a - 3b) \\ &= y \cdot (4a - 3b) + 2c \cdot (4a - 3b) \\ &= (4a - 3b) \cdot (y + 2c) \end{aligned}$$

3) ÖZDEŞLİKLERDEN YARARLANARAK ÇARPANLARA AYIRMA

A) İKİ KARE FARKI ÖZDEŞLİĞİ İLE ÇARPANLARA AYIRMA

Bazı ifadeler Özdeşlik konusunda öğrendiğimiz iki kare farkı özdeşliği kullanarak çarpanlara ayrılabilir. Cebirsel ifadedeki iki terim de eğer tam kare ise bu iki terimin kareköklerinin toplamı ile farkı çarpılır.

$$x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$$

ÖRNEK: $x^2 - 25$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$$x^2 - 25 = (x - 5) \cdot (x + 5)$$

ÖRNEK: $4y^2 - 36$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$$4y^2 - 36 = (2y - 6).(2y + 6)$$

B) TAM KARE ÖZDEŞLİKLERİ İLE ÇARPANLARA AYIRMA

Bazı ifadeler Özdeşlik konusunda öğrendiğimiz tam kare özdeşlikleri kullanarak çarpanlara ayrılabilir. Cebirsel ifadedeki birinci terimin karekökü ile üçüncü terimin karekökünün çarpımının iki katı ortanca terimi veriyorsa bu cebirsel ifade bir tam karedir. Çarpanları ise birinci terimin karekökü ile ikinci terimin karekökünün toplamının karesidir (veya farkının karesidir).

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y).(x + y)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y).(x - y)$$

ÖRNEK: $x^2 + 6x + 9$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

İfadesinin ilk terimi x^2 ve üçüncü terimi 9'dur.

Bu terimlerin karekökleri x ve 3'tür.

Ortadaki terim ise bu kareköklerin çarpımının iki katıdır.

Bu sebeple bu ifade bir tam karedir ve çarpanlara şu şekilde ayrılır:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3).(x + 3)$$

ÖRNEK: $25x^2 - 20xy + 4y^2$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

İfadesinin ilk terimi $25x^2$ ve üçüncü terimi $4y^2$ 'dir.

Bu terimlerin karekökleri $5x$ ve $2y$ 'dir.

Ortadaki terim ise bu kareköklerin çarpımının iki katıdır.

Bu sebeple bu ifade bir tam karedir ve çarpanlara şu şekilde ayrılır:

$$25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x + 2y)^2 = (5x + 2y).(5x + 2y)$$

4) $ax^2 + bx + c$ ŞEKLİNDEKİ İFADELERİ ÇARPANLARA AYIRMA

$ax^2 + bx + c$ şeklindeki ifadeleri çarpanlara ayırma 8. sınıf müfredatında yer almamaktadır.

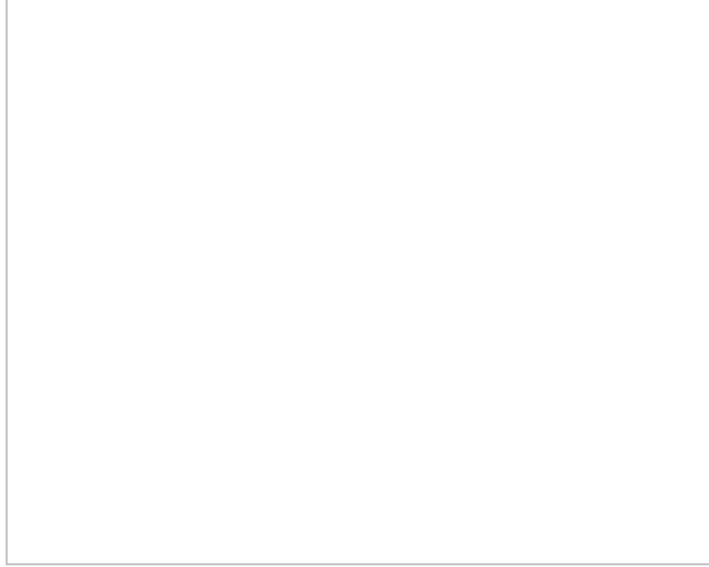
Bu şekildeki ifadelerin çarpanlara nasıl ayrıldığını merak ediyorsanız aşağıdaki bölümden öğrenebilirsiniz.

$ax^2 + bx + c$ üç terimli cebirsel ifade çarpanlara ayrılırken ax^2 ve c 'nin çarpanları, çarpaz çarpımlarının toplamı bx 'i verecek şekilde altlarına yazılır. Yazılan çarpanların karşılıklı toplamları verilen ifadenin çarpanlarını oluşturur.

ÖRNEK: $x^2 + 5x + 6$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Bu ifadedeki x^2 ve 6 'yı çarpanlarına ayıralım. Burada ayırırken çarpaz çarpıp topladığımızda ortadaki ifadeyi vermesi gerektiğini unutmamalıyız ve ona göre çarpan seçmeliyiz.

$x^2 = x \cdot x$ ve $+6 = 3 \cdot 2$ olsun. Burada $6 = (-3) \cdot (-2)$ şeklinde de yazabilirdik ancak ortadaki ifadeye göre seçmek durumundayız.

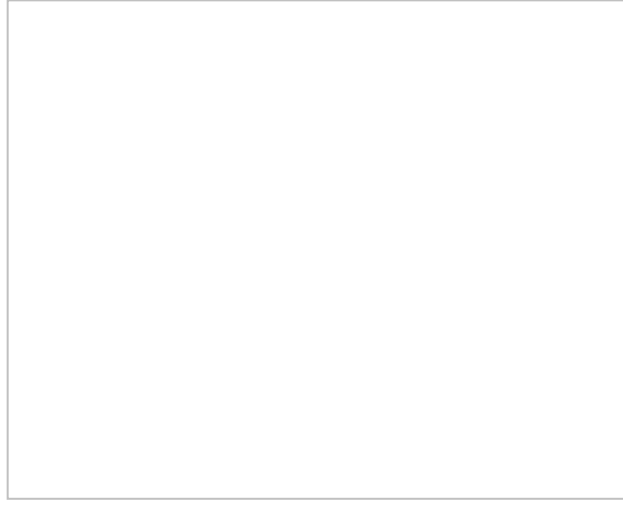


Her iki terimin çarpanlarını altlarına yazdık ve çarpaz çarpıp topladığımızda ortadaki terimi vermesini sağladık. Son olarak bu üç terimli cebirsel ifadenin çarpanlara ayrılmış şeklini yazmalıyız. Çarpanlara ayrılmış şeklini yazarken yan yana bulunan ifadeleri toplayacağız ve bunları çarpacağız. Yani resimdeki mavi kısım ile kırmızı kısmı çarpacağız.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

ÖRNEK: $2x^2 + 7x - 15$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Birinci ve üçüncü terimin altına çarpanlarını yazarken uygun çarpanlar seçmeli ve çarpaz çarpılıp toplanınca ortadaki terimi vermesi gerektiğini unutmamalıyız. Buna göre bu ifade şu şekilde çarpanlarına ayrılırdı.



Her iki terimin çarpanlarını altlarına yazdık ve çapraz çarpıp topladığımızda ortadaki terimi vermesini sağladık. Son olarak bu üç terimli cebirsel ifadenin çarpanlara ayrılmış şeklini yazmalıyız. Çarpanlara ayrılmış şeklini yazarken yan yana bulunan ifadeleri toplayacağız ve bunları çarpacağız. Yani resimdeki mavi kısım ile kırmızı kısmı çarpacağız.

$$2x^2 + 7x - 15 = (2x - 3)(x + 5)$$

--	--

--	--

--	--

--	--

Cebir Karoları ile arpanlara Ayırma

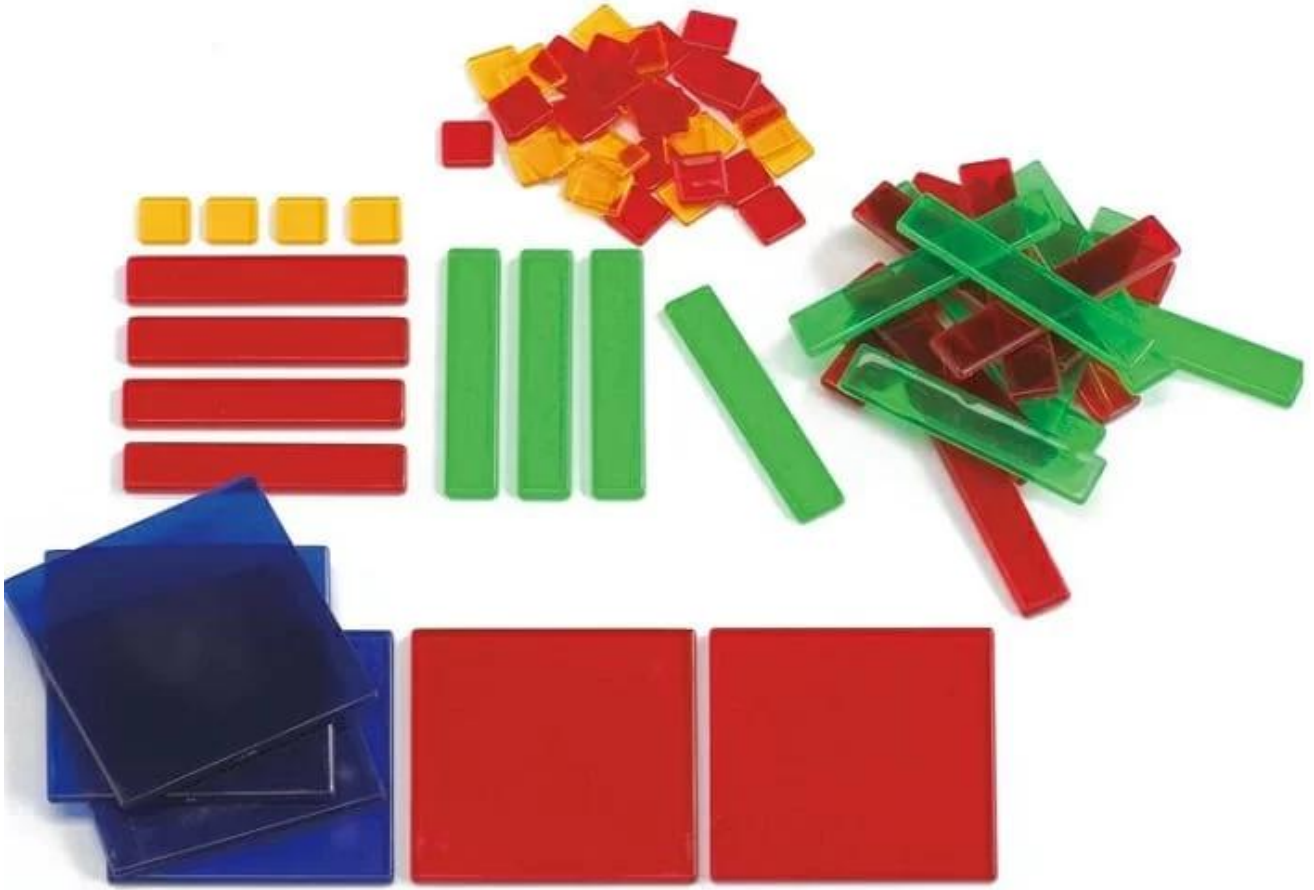
BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Cebir Karoları Nedir?
- √ Cebir Karoları Kullanarak arpanlara Ayırma Nasıl Yapılır?

Cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırırken çarpanlara ayırma yöntemlerinden birini veya cebir karolarını kullanabiliriz. arpanlara ayırma yöntemleri hakkında arpanlara Ayırma konusuna bakabilirsiniz.

CEBİR KAROLARI

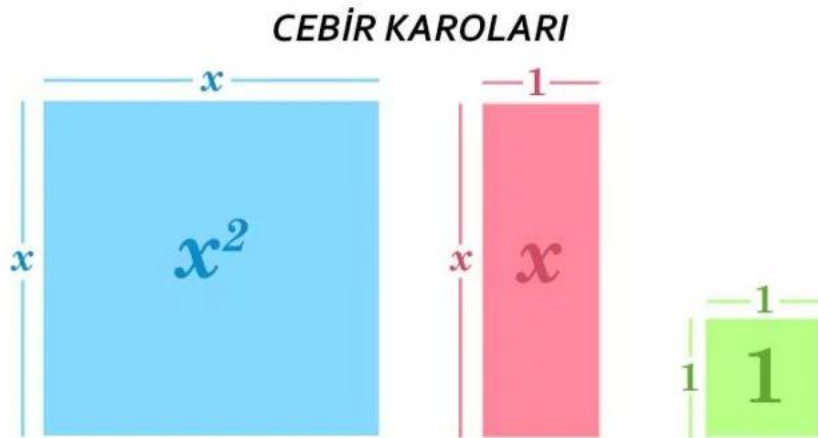
Cebir karoları cebir öğrenme alanında ifadeleri ve işlemleri modellemek için kullanılan malzemelerdir. Öğrencilerin cebir problemlerini somut materyallerle ifade etmesine ve çözmesine yardımcı olur.



CEBİR KAROSU PARÇALARI

Cebir karosu resimlerde de görüldüğü gibi şu parçalardan oluşur:

- Kenar uzunluğu x (alanı x^2) olan kare,
- Kenar uzunluğu 1 (alanı 1) olan kare,
- Kenar uzunluğu x ve 1 (alanı x) olan dikdörtgen.



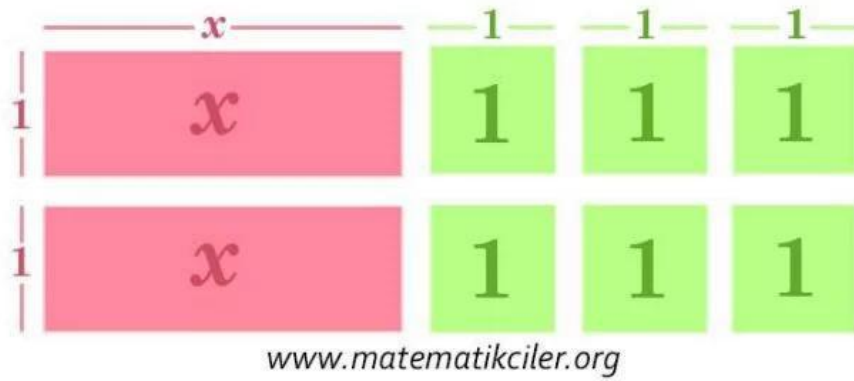
CEBİR KAROLARI İLE ÇARPANLARA AYIRMA

Cebir karoları ile çarpanlara ayırma işlemi yaparken yapacağımız şey aslında dikdörtgenin alan formülünü kullanmak. Bize verilen cebirsel ifadeyi cebir karolarıyla dikdörtgen şeklinde oluşturacağız ve bu dikdörtgenin kenar uzunlukları çarpanlarımız olacak.

ÖRNEK: $2x + 6$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Bu ifadeyi ortak çarpan parantezine alma yöntemiyle çarpanlarına ayırabilirdik. Burada cebir karolarıyla çarpanlarına ayıracağız.

Bu ifade için 2 tane alanı x olan dikdörtgene ve 6 tane alanı 1 olan kareye ihtiyacımız var. Bu parçaları dikdörtgen elde edecek şekilde yerleştirmeliyiz. Dikdörtgeni oluşturduktan sonra bu dikdörtgenin kenar uzunluklarını çarpım şeklinde yazarsak cebirsel ifadeyi çarpanlarına ayırmış oluruz.



Dikdörtgenin Alanı : $2x + 6$

Uzun Kenarın Uz. : $x + 3$

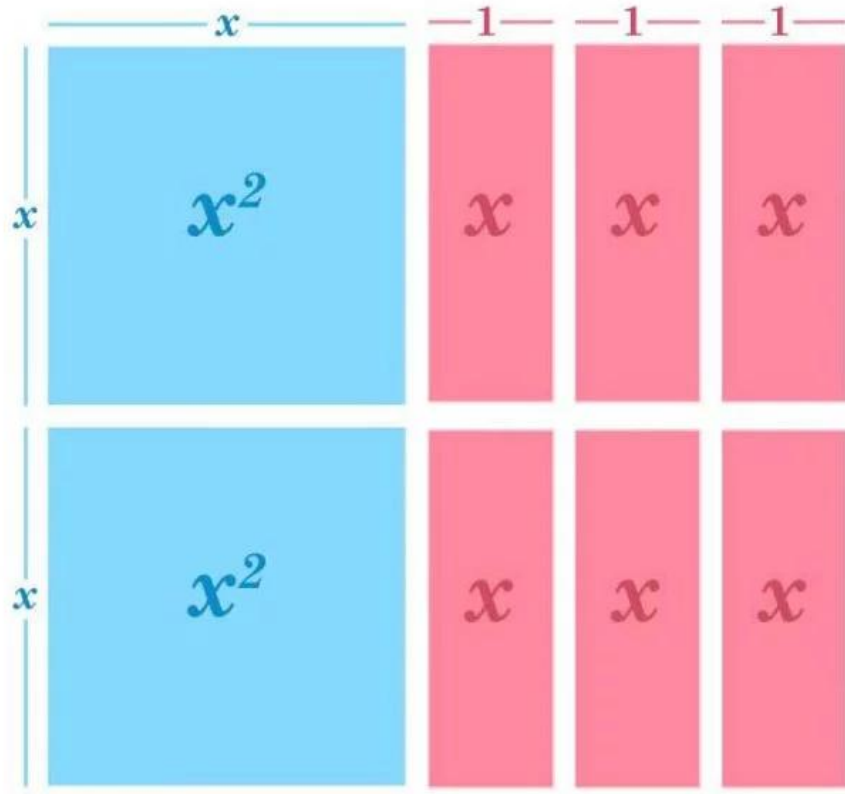
Kısa Kenarın Uz. : 2

Dikdörtgenin Alanı = Uzun Kenarın Uzunluğu x Kısa Kenarın Uzunluğu

$$2x + 6 = (x + 3) \cdot 2$$

ÖRNEK: $2x^2 + 6x$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Bu ifade için 2 tane alanı x^2 olan kareye ve 6 tane alanı x olan dikdörtgene ihtiyacımız var. Bu şekilleri aşağıdaki gibi yerleştirecek dikdörtgen oluşur.

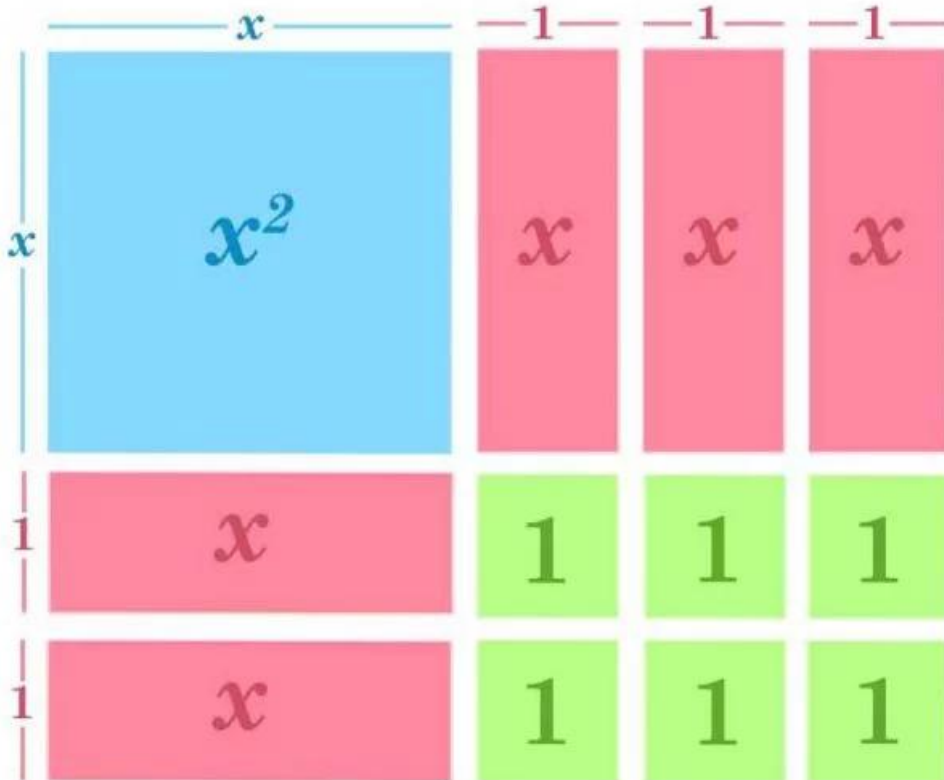


www.matematikciler.org

İfadenin çarpanlara ayrılmış hali: $2x^2 + 6x = 2x \cdot (x + 3)$

ÖRNEK: $x^2 + 5x + 6$ cebirsel ifadesini çarpanlara ayıralım.

Bu ifade için 1 tane alanı x^2 olan kareye, 5 tane alanı x olan dikdörtgene ve 6 tane alanı 1 olan kareye ihtiyacımız var. Bu şekilleri aşağıdaki gibi yerleştirirsek dikdörtgen oluşur.



www.matematikciler.org

İfadenin arpanlara ayrılmış hali: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2).(x + 3)$



Bir Bilinmeyenli Rasyonel Denklemler

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

√ Bir Bilinmeyenli Rasyonel Denklemler

RASYONEL DENKLEMLER

Rasyonel ifade şeklinde bulunan denklemleri çözerken kesirlerde olduğu gibi işlem yapacağız. Bazen payda eşitleyeceğiz, bazen genişletme, sadeleştirme yapacağız, bazen de içler-dışlar çarpımı yapacağız.

İşlemler sonunda bulduğumuz denklemdeki bilinmeyen değerine **denklemin kökü** denir. Denklem köklerinin oluşturduğu kümeye denklemin **çözüm kümesi** denir.

ÖRNEK: $\frac{x+14}{2x} = 4$ denklemini sağlayan x değerini bulalım.

İçler-Dışlar çarpımı yaparız. Daha sonra bilinmeyenleri eşitliğin bir tarafına toplarız ve cevabı buluruz.

$$x + 14 = 8x$$

$$14 = 8x - x$$

$$14 = 7x$$

$$x = 2$$

ÖRNEK: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ denklemini sağlayan x değerini bulalım.

Önce paydaları eşitleyip toplama işlemini yaparız, daha sonra içler-dışlar çarpımı yaparak çözümü yaparız.

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = 5$$

$$\frac{5x}{6} = 5$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

ÖRNEK: $\frac{4x-10}{x-5} = \frac{10}{x-5} - \frac{6}{5}$ denklemini sağlayan x değerlerini bulalım.

Bilinmeyenleri eşitliğin sol tarafına alıp işlem yapalım. Daha sonra içler-dışlar çarpımı yaparak çözüme ulaşalım.

$$\frac{4x-10}{x-5} - \frac{10}{x-5} = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{4x-20}{x-5} = \frac{-6}{5}$$

$$20x - 100 = -6x + 30$$

$$20x + 6x = 30 + 100$$

$$26x = 130$$

$$x = 5$$

x'in değerini 5 bulduk ancak bulduğumuz değer denklemini sağlamaz çünkü denkleminde x yerine 5 yaptığımızda **payda 0** oluyor. Bu nedenle x=5 değeri için denklemin çözümü olamaz. O zaman bu denklemin çözüm kümesi **boş kümedir**.

Denklemin sonucunda bulduğumuz değer paydayı sıfır yapıyorsa o değer denklemin kökü olarak kabul edilmez.

❖ RASYONEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ

--	--

Koordinat Sistemi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Kartezyen Koordinat Sistemi
- √ Apsis, Ordinat, Orijin, Sıralı İkili
- √ Koordinat Sisteminde Noktaların Konumları
- √ Koordinat Sistemindeki Bölgeler

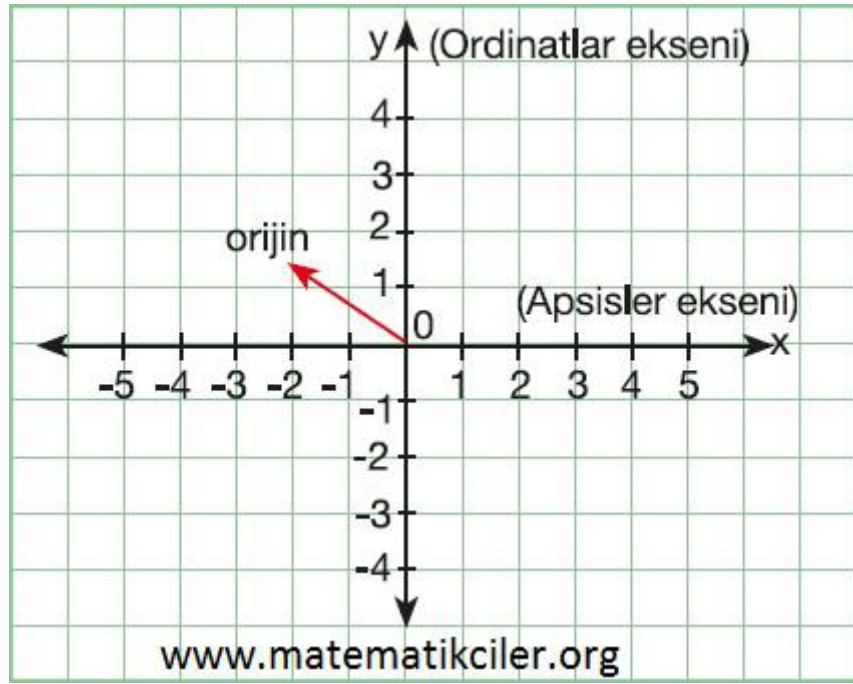
KARTEZYEN KOORDİNAT SİSTEMİ NEDİR?

Öncelikle kartezyen nedir ve koordinat nedir bunları öğrenelim.

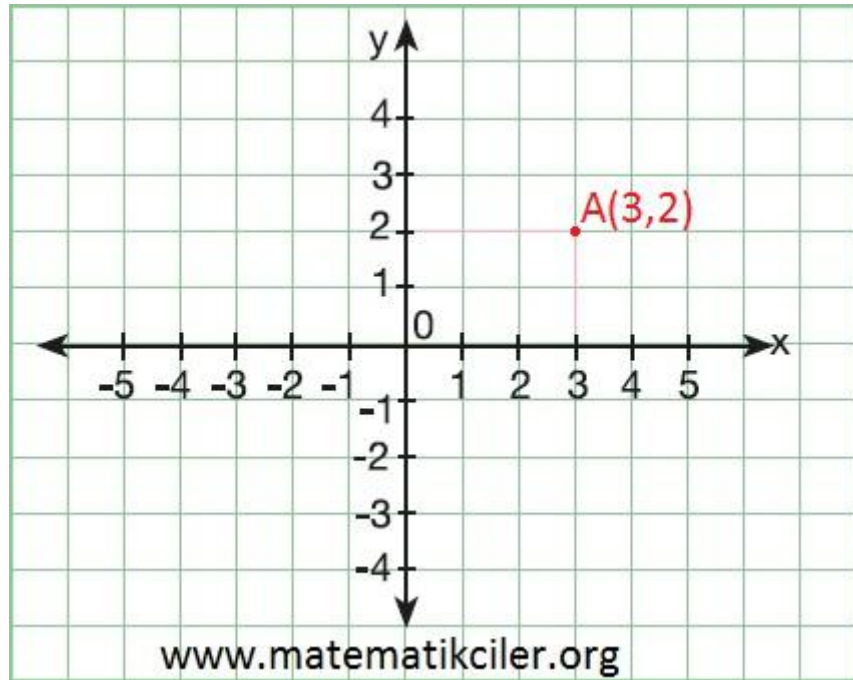
Kartezyen (İngilizce : Cartesian) Fransız matematikçi Descartes'in adına Latince +ian (+cil / +çıl) ekinin getirilmesiyle oluşmuş bir kelimedir. Koordinat ise (İngilizce : co-ordinate) Latince com-(birlikte) takısı ile "to ordinate" (sıralamak, dizmek) eyleminin birleşimiyle oluşmuştur. Bu kısa bilgilerden sonra kartezyen koordinat sisteminin tanımını yapalım. Bakınız: Kartezyen Koordinat Sisteminin Tarihçesi

KOORDİNAT SİSTEMİ

İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) noktasında birbiriyle dik kesişmesiyle oluşan sisteme **kartezyen koordinat sistemi** denir. Burada iki sayı doğrusu yani iki boyut olduğu için **iki boyutlu kartezyen koordinat sistemi** de denir.



Koordinat sisteminde yatay olan eksene **x eksenini (apsisler eksenini)**, dikey eksene ise **y eksenini (ordinatlar eksenini)** denir. Eksenlerin keşitştiği noktaya **orijin veya başlangıç noktası** denir.



Koordinat sisteminde noktaların yerleri **sıralı ikililerle** (Örneğin (-5 , +7) gibi) belirlidir. Koordinat sistemindeki her noktaya karşılık gelen bir sıralı ikili bulunur.

Bir noktayı gösteren sıralı ikililere o **noktanın koordinatı** denir. Sıralı ikilideki ilk sayı x eksenine, ikinci sayı y eksenin karşılık gelen sayıyı gösterir.

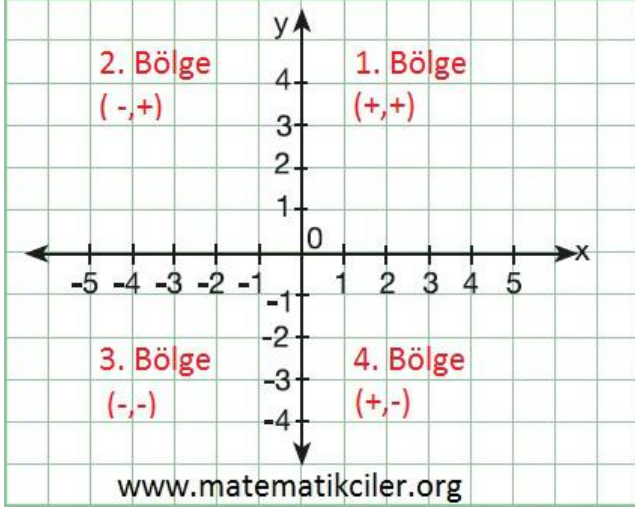


Örneğin bir A noktası olsun. Bu noktanın koordinatları 3'e 2 olsun. Bu A(3,2) şeklinde gösterilir. Burada 3'e apsis (x), 2'ye ordinat (y) denir.

KOORDİNAT SİSTEMİNDE BÖLGELER

Koordinat sistemi düzlemi 4 bölgeye ayırır.

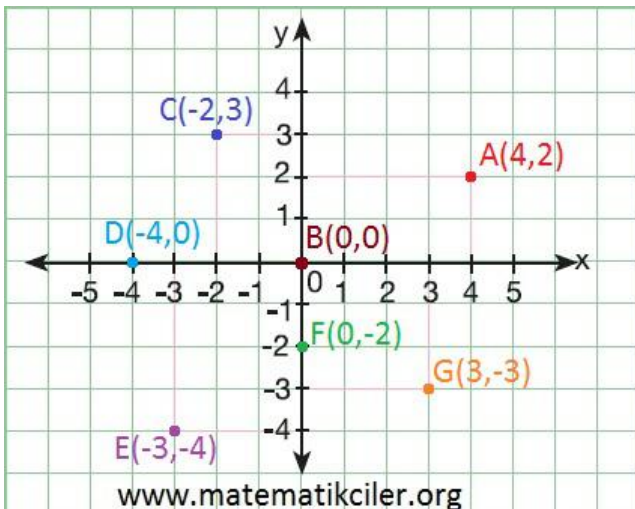
Bu bölgelerin sıralanışı C harfi şeklinde aklınızda kalabilir.



Koordinat sistemindeki dört bölge ve bu bölgedeki noktaların koordinatlarının işaretleri aşağıdaki gibidir.

- ✓ 1. Bölgedeki noktaların; apsisleri (x) pozitif, ordinatları da (y) pozitif.
- ✓ 2. Bölgedeki noktaların; apsisleri (x) negatif, ordinatları (y) pozitif.
- ✓ 3. Bölgedeki noktaların; apsisleri (x) negatif, ordinatları (y) negatiftir.
- ✓ 4. Bölgedeki noktaların; apsisleri (x) pozitif, ordinatları (y) negatiftir.

KOORDİNAT SİSTEMİNDE NOKTALARIN KOORDİNATLARI



Şimdi bir kaç noktayı koordinat düzleminde gösterelim:

A(4,2) – A noktası 1. bölgededir.

B(0,0) – B noktası orijindedir.

C(-2,3) – C noktası 2. bölgededir.

D(-4,0) – D noktası x eksenindedir.

E(-3,-4) – E noktası 3. bölgededir.

F(0,-2) – F noktası y eksenindedir.

G(3,-3) – G noktası 4. bölgededir.

NOT: Apsisi 0 (sıfır) olan noktalar y ekseninde, ordinatı 0 (sıfır) olan noktalar x ekseninde yer alır.

--	--

--	--

--	--

Doğrusal İlişki ve Doğrusal Denklemler

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Doğrusal İlişki Nedir?
- √ Bağımlı ve Bağımsız Değişken
- √ Doğrusal Denklemler

DOĞRUSAL İLİŞKİLER

“Doğrusal ilişki nedir?” sorusunun cevabına örneklerle ulaşalım. Aşağıdaki tabloyu ve grafiği inceleyelim. Tabloda günde 50 soru çözen bir kişinin 7 gün boyunca toplam çözdüğü soru sayıları görünüyor.

Tabloda da görüldüğü gibi gün sayısı arttıkça toplamda çözülen soru sayısı da artmaktadır. Tablodaki verilerin grafiğini çizerek grafiğin bir **doğru** şeklinde olduğunu görürüz.

Çözülen soru sayısı ile geçen gün sayısı arasındaki ilişkiyi cebirsel ifade ile gösterirsek: $SORU\ SAYISI = GÜN \times 50$

Bu örnekte olduğu gibi iki değişken arasındaki ilişkinin grafiği doğru şeklinde ise bu iki değişken arasında **doğrusal ilişki** vardır deriz.

Değişkenlerden değeri başka bir değişkene bağlı olarak değişen değişkene **bağımlı değişken**, değerini kendi belirlediğimiz değişkene **bağımsız değişken** denir.

DOĞRUSAL DENKLEM NEDİR?

Doğrusal ilişkiyi ifade eden denklemlere doğrusal denklem denir. x ve y değişken, a ve b katsayı ve c sabit terim olmak üzere: $ax + by + c = 0$ biçiminde olan denklemlere **doğrusal**

Gün	Soru Sayısı	İlişki
1	50	1x50
2	100	2x50
3	150	3x50
4	200	4x50
5	250	5x50
6	300	6x50
7	350	7x50

Tablo: Çözülen Soru Sayısı

www.matematikciler.org



denklem denir. Doğrusal denklemde a ve b katsayılarının ikisi birden 0 olamaz. Yani denklemde en az bir tane bilinmeyen bulunmalıdır.

Az önce verdiğimiz örneği incelersek:

$$\text{SORU SAYISI} = \text{GÜN} \times 50$$

$s = 50 \cdot g$ olarak yazabiliriz. Bu denklemde iki tane değişken vardır. Soru sayısı gün sayısına bağlı olarak değiştiği için soru sayısı bağımlı değişken, gün sayısı ise bağımsız değişkendir. Bu denklem sabit terimi olmayan bir doğrusal denklemidir.

ÖRNEK: Bir taksinin taksimetresi açılıştta 3 TL ve gidilen her kilometrede 0,5 TL yazmaktadır. Şimdi bu ilişkiyi tablo ve grafikte gösterelim.

Tablo ve grafik incelenirse veriler arasında doğrusal bir ilişki olduğu görülür.

Bu ilişkiyi yazacak olursak:

$$\text{ÜCRET} = 3 \text{ TL} + \text{YOL} \times 0,5 \text{ TL}$$

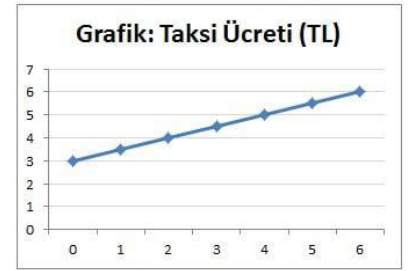
$$\text{ü} = 3 + y \cdot 0,5$$

Bu denklemimiz doğrusal denklemidir. Burada ücret değişkeni gidilen yola bağlı olduğu için ücret bağımlı, yol bağımsız değişkendir.

Doğrusal denklemlerin grafikleri doğru şeklindedir. Doğrusal denklemlerin grafiklerini koordinat sisteminde çizeceğiz Kartezyen koordinat sisteminden sonra doğrusal denklem grafiği nasıl çizilir öğreneceğiz.

Yol (KM)	Ücret (TL)	İlişki
0	3	3
1	3,5	$3 + 1 \times 0,5$
2	4	$3 + 2 \times 0,5$
3	4,5	$3 + 3 \times 0,5$
4	5	$3 + 4 \times 0,5$
5	5,5	$3 + 5 \times 0,5$
6	6	$3 + 6 \times 0,5$

Tablo: Taksi Ücreti
www.matematikciler.org



Doğrusal Denklemlerin Grafikleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Doğrusal Denklemler ve Grafikler
- √ Doğrusal Denklemin Grafiği Nasıl Çizilir?
- √ Orjinden Geçmeyen, Orjinden Geçen ve Eksenlere Paralel Doğruların Grafikleri

DOĞRUSAL DENKLEM GRAFİKLERİ

Doğrusal denklemler ve koordinat sistemi konularını daha önce öğrenmiştik. Şimdi ise doğrusal denklemlerin grafikleri nasıl çizilir öğreneceğiz.

Doğrusal denklemlerin grafiği bir doğru modelidir. Bu doğruyu oluşturan sıralı ikililer doğrudur.

Bizim grafiği çizebilmemiz için bu doğrunun geçtiği iki tane noktayı bulmamız yeterlidir. (Çünkü iki noktadan yalnız bir doğru geçer.)

Şimdi bu iki noktayı nasıl bulacağımızı görelim:

- ▶ Doğru denkleminde x yerine bir değer o noktanın vererek y değerini veya y yerine değer vererek x değerini bulabiliriz.
- ▶ Böylece bir tane (x,y) sıralı ikilisi yani bir nokta buluruz.
- ▶ Aynı şekilde başka değerler vererek istediğimiz kadar nokta bulabiliriz. Ama bize 2 tane nokta yeterli.
- ▶ Bulduğumuz noktaları koordinat sisteminde işaretleyerek bu noktalardan geçecek şekilde bir doğru çizeriz.

Bununla ilgili bir örnek yaparak bizim daha çok başvuracağımız yönteme geçelim.

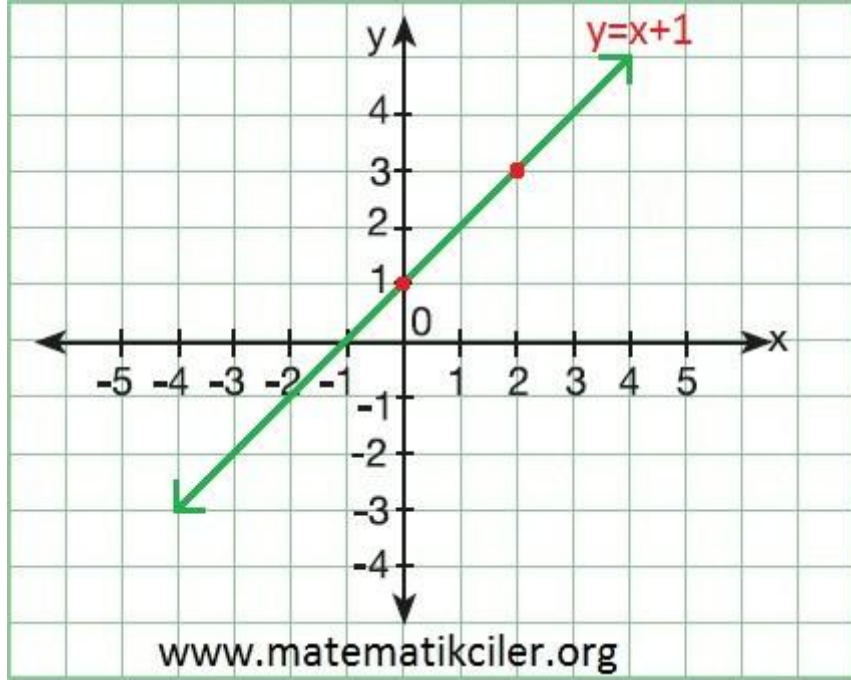
ÖRNEK: $y = x + 1$ doğrusal denkleminin grafiğini çizelim.

Denklemden x yerine değerler vererek y değerleri bulalım.

x yerine 0 yazarsak $y = x + 1$ olduğundan $y = 1$ bulunur. İlk noktamız (0,1) oldu.

x yerine 2 yazarsak $y = x + 1$ olduğundan $y = 3$ bulunur. İkinci noktamız da (2,3) oldu.

İki nokta bulmamız yeterli. Bu iki noktayı kartezyen koordinat sisteminde bularak bu noktalardan geçen doğruyu çiziyoruz.



Grafikleri yukarıdaki gibi çizdiğimiz gibi daha çok şu yöntemi kullanırız:

- ✓ x 'e sıfır (0) değeri verilerek y değeri bulunur. (Bulduğumuz nokta doğrunun **y** **eksenini kestiği noktadır.**)
- ✓ y 'ye sıfır (0) değeri verilerek x değeri bulunur. (Bulduğumuz nokta doğrunun **x** **eksenini kestiği noktadır.**)
- ✓ Bulduğumuz iki noktayı koordinat sisteminde işaretleyerek bu noktalardan geçecek şekilde bir doğru çizeriz.

ÖRNEK: $2x + y = 4$ doğrusunun grafiğini çizelim.

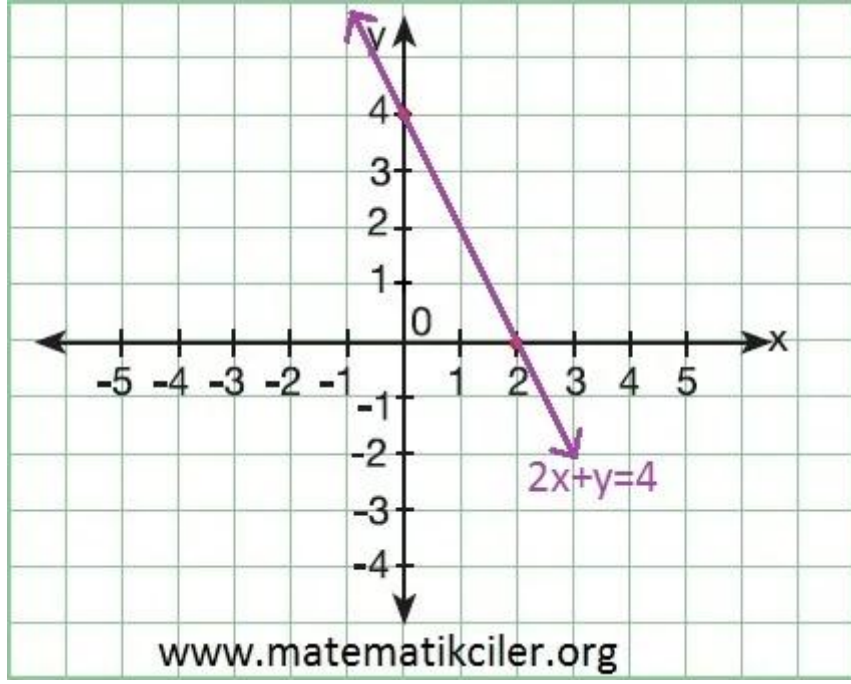
x yerine 0 yazarsak $2 \cdot 0 + y = 4$ 'den $y = 4$ bulunur. İlk noktamız (0,4) oldu.

Bu nokta aynı zamanda doğrunun y eksenini kestiği noktadır.

y yerine 0 yazarsak $2x + 0 = 4$ 'den $x = 2$ bulunur. İkinci noktamız (2,0) oldu.

Bu nokta aynı zamanda doğrunun x eksenini kestiği noktadır.

Şimdi bu noktaları koordinat düzleminde bularak grafiğimizi çizelim.



Yazar: www.matematikciler.com

ORİJİNDEN GEÇEN DOĞRUNUN GRAFİĞİ

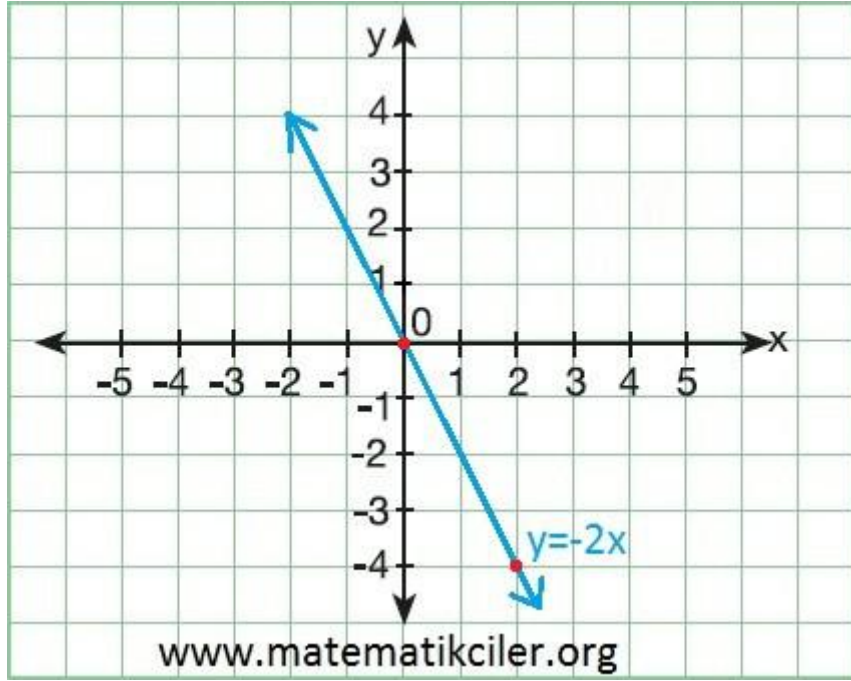
Doğrusal denklemde x yerine sıfır (0) yazdığımızda y de sıfır (0) çıkıyorsa bu doğru orijinden geçer. İkinci bir nokta bulmak için x veya y yerine sıfırdan farklı bir değer veririz.

(Orijinden geçen doğruların denkleminde sabit terim olmaz. Eğer sabit terim yoksa orijinden geçtiğini anlayabiliriz)

ÖRNEK: $y = -2x$ doğrusunu ele alalım.

x yerine 0 yazarsak y de 0 çıkar. (0,0) orijinden geçer.

x yerine 2 yazarsak $y = -4$ çıkar. (2,-4) noktasından da geçer. Bu iki noktayı koordinat sisteminde buluruz ve grafiği çizeriz.

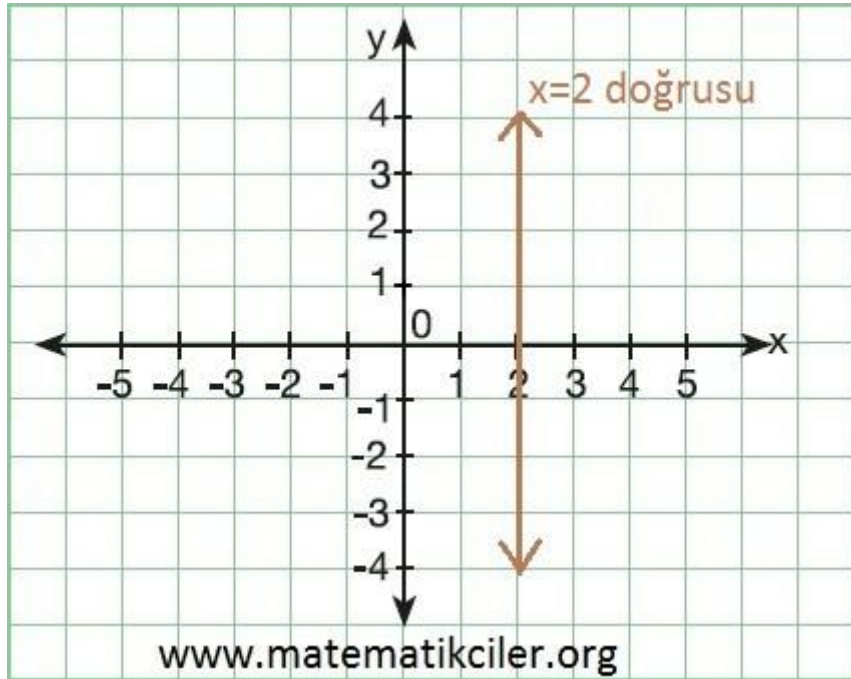


EKSENLERE PARALEL DOĞRULARIN GRAFİĞİ

Doğrusal denklemde eğer bir tane değişken varsa bu denklemin grafiği x veya y eksenine paraleldir.

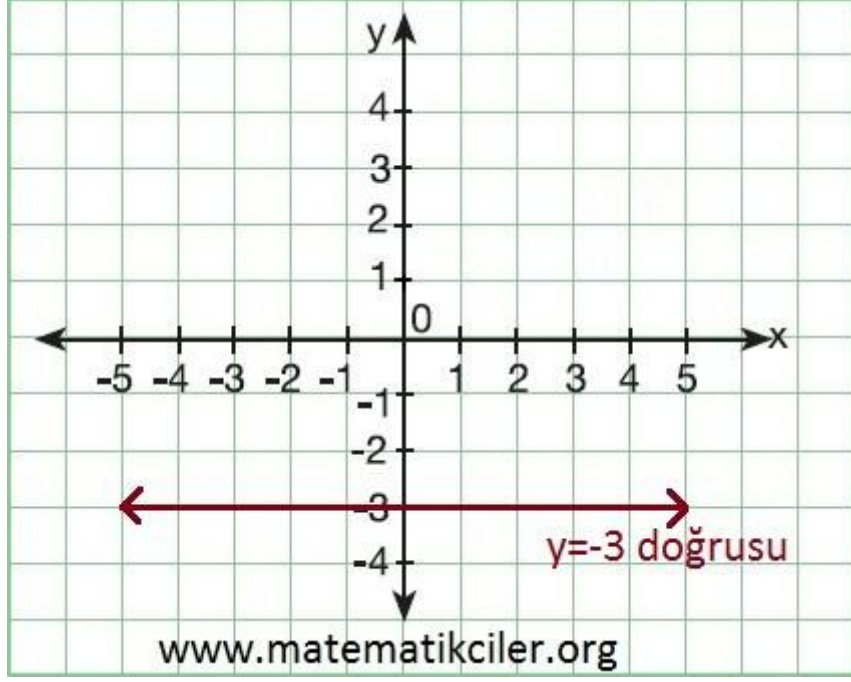
Eğer denkleminizde sadece x değişkeni varsa bu denklemin grafiği y eksenine paraleldir.

Örneğin $x = 2$ denkleminin grafiğini çizecek olursak bu doğru x eksenindeki 2 noktasından dik geçer ve y eksenine paraleldir.



Eğer denkleminizde sadece y değişkeni varsa bu denklemin grafiği x eksenine paraleldir.

Örneğin $y = -3$ denkleminin grafiğini çizecek olursak bu doğru y eksenindeki -3 noktasından dik geçer ve x eksenine paraleldir.



Eğim ve Doğrunun Eğimi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

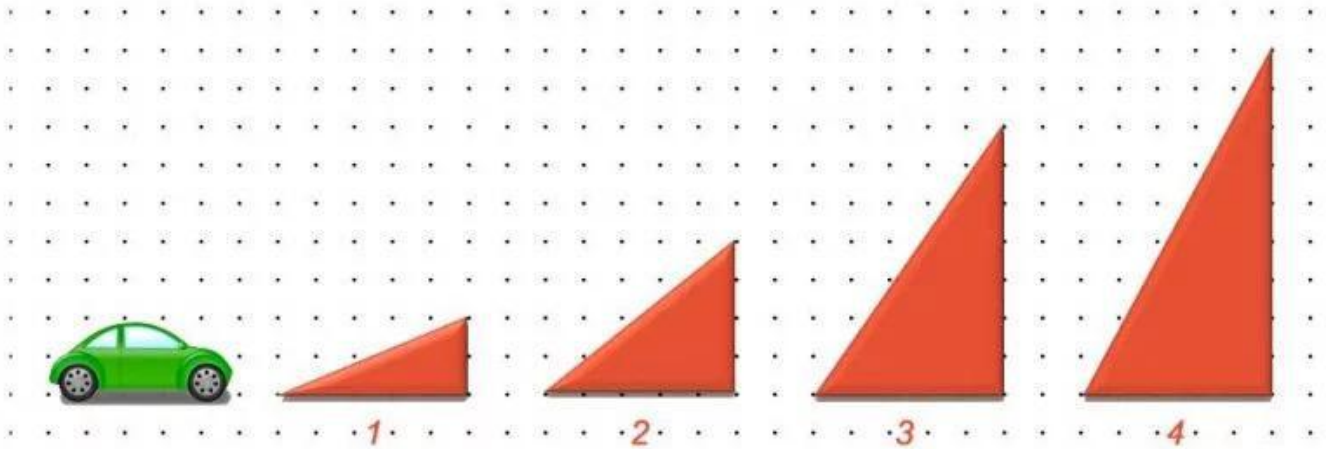
- √ Eğim
- √ Doğrunun Eğimi
- √ Doğrunun Eğimi ile Denklemi Arasındaki İlişki

EĞİM

Dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı **eğim** olarak adlandırılır. "m" harfi ile gösterilir.

$$m = \frac{\text{Dikey Uzunluk}}{\text{Yatay Uzunluk}}$$

ÖRNEK: Aşağıdaki yollardan hangisinin eğimi fazladır? Her bir yolun eğimini bulalım. Yüzde olarak gösterelim.



En dik yol 4. yol olduğu için eğimi en fazla olan yol 4. yoldur. Bir yolun eğimini bulmak için hipotenüsü yol olan bir dik üçgende dikey uzunluğu yatay uzunluğa böleriz.

Yolların eğimlerini m_1 , m_2 , m_3 , m_4 olarak gösterelim.

$$\blacktriangleright m_1 = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = \%40$$

$$\blacktriangleright m_2 = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = \%80$$

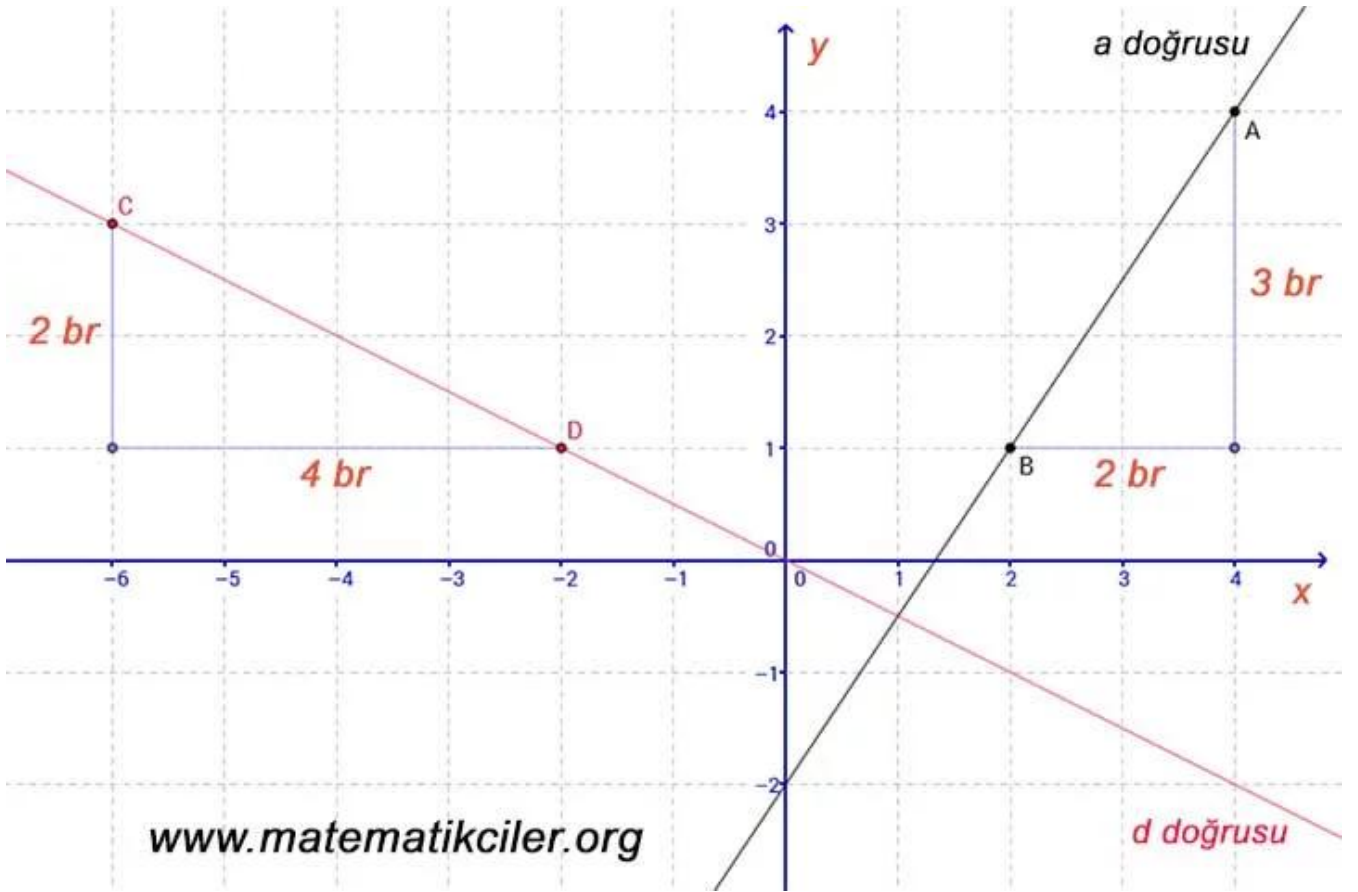
$$\blacktriangleright m_3 = \frac{7}{5} = \frac{140}{100} = \%140$$

$$\blacktriangleright m_4 = \frac{9}{5} = \frac{180}{100} = \%180$$

DOĞRUNUN EĞİMİ

Bir doğrunun eğimi, doğru üzerinde bulunan iki nokta arasındaki dikey değişimin yatay değişime oranıdır. y eksenine göre sağa yatık doğruların eğimi pozitif, sola yatık doğruların eğimi negatiftir.

ÖRNEK: Aşağıdaki d doğrusunun ve a doğrusunun eğimini bulalım.



Doğrunun herhangi bir yerinde dik üçgen çizeriz. Bu üçgende 90 derecenin karşısındaki kenarın doğrunun üzerinde olmasına ve kenar uzunluklarının da tam sayı olmasına dikkat ederiz.

a doğrusu y eksenine göre sağa yatık olduğu için eğimi pozitifdir.

$$m_a = \frac{3}{2}$$

d doğrusu y eksenine göre sola yatık olduğu için eğimi negatiftir.

$$m_d = -\frac{2}{4}$$

EĞİM AÇISI

Bir doğrunun **x eksenini** ile eksenin üzerinde yaptığı açılardan sağda olanına **eğim açısı** denir.

Eğim açısı 0 derece olan (x eksenine paralel) doğruların **eğimi sıfırdır**.

Eğim açısı dar açı olan (sağa yatık) doğruların **eğimi pozitiftir**.

Eğim açısı 90 derece olan (y eksenine paralel) doğruların **eğimi tanımsızdır**, hesaplanamaz.

Eğim açısı geniş açı olan (sola yatık) doğruların **eğimi negatiftir**.

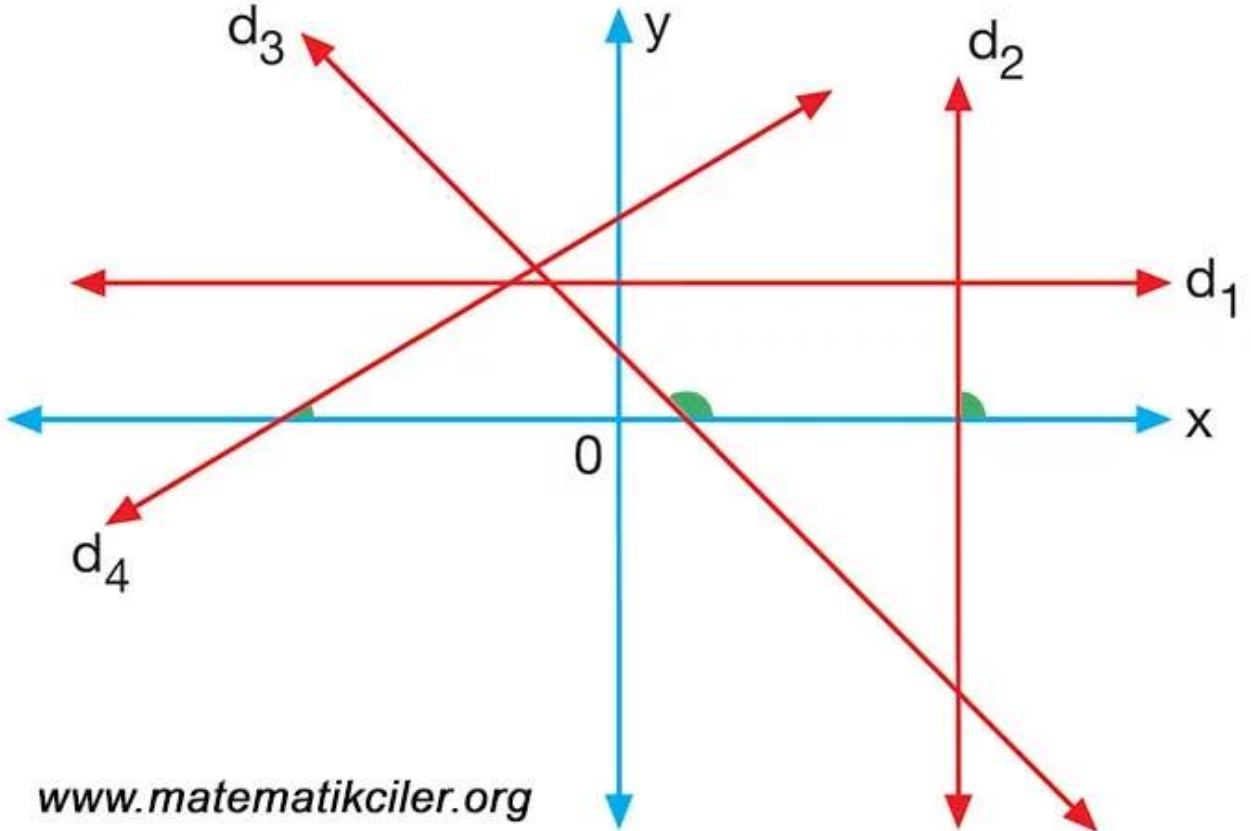
ÖRNEK: Aşağıdaki doğruların eğim açıların yeşil renk ile gösterilmiştir. Bu doğrulardan:

d_1 doğrusu x eksenine paralel olduğu için eğimi sıfırdır,

d_2 doğrusu x eksenine dik olduğu için eğimi hesaplanamaz,

d_3 doğrusunun eğim açısı geniş açı olduğu için eğimi negatiftir,

d_4 doğrusunun eğim açısı dar açı olduğu için eğimi pozitiftir.



DOĞRUNUN EĞİMİ İLE DENKLEMİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Denklemi $y=mx+n$ şeklindeki doğrularda **x'in katsayısı doğrunun eğimidir**. Bir doğrunun eğimini grafiğini çizmeden bulabilmek için doğru denkleminde y yalnız bırakılır, x'in katsayısı eğimi verir.

ÖRNEK: Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulalım.

1) $y = 3x + 4$ doğrusunun eğimi x'in katsayısı olan 3'tür.

2) $4x + 2y + 3 = 0$ doğrusunun eğimini bulmak için y yalnız bırakılır.

$$2y = -3 - 4x$$

$$y = \frac{-3-4x}{2} \quad \text{doğrunun eğimi } -2\text{'dir.}$$

$$y = \frac{-3}{2} - 2x$$

NOT: Paralel doğruların eğimleri birbirine eşittir.

ÖRNEK: $y = 2x + 5$ ve $ax - 2y - 4 = 0$ doğruları birbirine paralel ise a kaçtır?

Bu doğrular birbirine paralel ise eğimleri birbirine eşittir.

Birinci doğrunun eğimi 2'dir. İkinci doğrunun eğimi de $\frac{a}{2}$ 'dir.

Eğimleri birbirine eşitlersek: $\frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$ bulunur.

NOT: Birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı -1 'dir.

ÖRNEK: $2x + 3y = 5$ ve $x - by = 4$ doğruları birbirine dik ise b kaçtır?

Bu doğrular birbirine dik olduğu için eğimleri çarpımı -1 'dir.

Birinci doğrunun eğimi

$$3y = 5 - 2x$$

$$y = \frac{5-2x}{3} \quad \text{olur.}$$

$$m = \frac{-2}{3}$$

İkinci doğrunun eğimi

$$-by = 4 - x$$

$$y = \frac{4-x}{-b} \quad \text{olur.}$$

$$m = \frac{-1}{-b} = \frac{1}{b}$$

Eğimlerinin çarpımını -1'e eşitlersek

$$\frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{b} = -1$$

$$\frac{-2}{3b} = -1$$

$$-2 = -3b \text{ olur.}$$

$$\frac{-2}{-3} = b$$

$$b = \frac{2}{3}$$

▼ EĞİM KONUSU İLE İLGİLİ

--	--

Eşitsizlikler

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Basit Eşitsizlikler
- √ Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler
- √ Eşitsizliklerin çözüm kümesini bulma ve sayı doğrusunda gösterme

Hayatımızda eşitlikler kadar **eşitsizlikler** de vardır. Hatta eşitsizlik eşitlikten daha fazla karşımıza çıkar diyebiliriz. Peki matematikte nasıl tanımlıyoruz bu eşitsizlik kavramını? Hadi öğrenelim.

EŞİTSİZLİKLER

$>$ (büyüktür), \geq (büyüktür veya eşittir), $<$ (küçüktür), \leq (küçüktür veya eşittir) sembolleri ile yazılan matematiksel ifadelere **eşitsizlik** denir.

Eşitsizliklerde kullandığımız sembolleri tanıyalım:

$>$ Büyüktür sembolü. Bu sembolün solundaki ifade sağındakinden büyüktür. Örnek: $5 > 3$

$<$ Küçüktür sembolü. Bu sembolün solundaki ifade sağındakinden küçüktür. Örnek: $1 < 7$

\geq Büyüktür veya eşittir sembolü. Bu sembolün solundaki ifade sağındakinden büyük de olabilir eşit de olabilir. Örnek: $x \geq 3$ ifadesinde x sayısı 3 de olabilir 3'ten büyük de olabilir.

\leq Küçüktür veya eşittir sembolü. Bu sembolün solundaki ifade sağındakinden küçük de olabilir eşit de olabilir. Örnek: $x \leq 12$ ifadesinde x sayısı 12 de olabilir 12'ten küçük de olabilir.

ÖRNEK: Aşağıdaki ifadelere uygun matematiksel ifadeleri yazalım.

2 katının 4 fazlası 10 olan sayı: $2x + 4 = 10$

2 katının 4 fazlası 10'dan küçük olan gerçek sayılar: $2x + 4 < 10$

2 katının 4 fazlası 10'dan büyük olan gerçek sayılar: $2x + 4 > 10$

2 katının 4 fazlası 10'a eşit veya 10'dan küçük olan gerçek sayılar: $2x + 4 \leq 10$

2 katının 4 fazlası 10'a eşit veya 10'dan büyük olan gerçek sayılar: $2x + 4 \geq 10$

Yukarıdaki beş ifadeden ilki eşitliktir. Diğer dördü ise eşitsizliktir.

ÖRNEK: Aşağıdaki ifadelere uygun eşitsizlikleri yazalım.

-2 katının 5 fazlası 10'dan küçük veya 10'a eşit olan gerçek sayılar: $-2.x + 5 \leq 10$

3 katının 12 eksiği, 10 katının 5 fazlasından küçük olan gerçek sayılar: $3.x - 12 < 10.x + 5$

7 fazlasının 2 katı kendisinden büyük olan gerçek sayılar: $2.(x + 7) > x$

Şimdi eşitsizliklerde hangi işlemleri yapabiliriz öğrenelim.

EŞİTSİZLİKLERİN ÖZELLİKLERİ

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir veya her iki taraftan aynı sayı çıkarılırsa eşitsizlik bozulmaz.

ÖRNEK: $13 < 14$ ifadesinde eşitsizliğin;

her iki tarafına 10 eklersek: $23 < 24$ olur,

her iki tarafından 10 çıkartırsak: $3 < 4$ olur.

Gördüğümüz gibi yaptığımız işlemler sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik doğru bir eşitsizliktir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayı ile çarpılır veya aynı pozitif sayıya bölünürse eşitsizlik bozulmaz.

ÖRNEK: $20 > 10$ ifadesinde eşitsizliğin;

her iki tarafını 10 ile çarparsak: $200 > 100$ olur,

her iki tarafını 10'a bölersek: $2 > 1$ olur.

Gördüğümüz gibi yaptığımız işlemler sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik doğru bir eşitsizliktir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı **negatif sayı** ile çarpılır veya aynı negatif sayıya bölünürse eşitsizlik **yön değiştirir**. Eşitsizliğin yön değiştirmesi demek, küçüktür (<) işaretinin büyüktür (>) olması veya büyüktür (>) işaretinin küçüktür (<) işareti olması demektir. Aynı şekilde \leq işareti \geq işareti olur ve \geq işareti \leq olur.



ÖRNEK: $16 > 12$ ifadesinde eşitsizliğin;

her iki tarafını -10 ile çarparsak eşitsizlik yön değiştirmelidir: $-160 < -120$ olur,

her iki tarafını -4 'e bölersek eşitsizlik yön değiştirmelidir: $-4 < -3$ olur.

Gördüğümüz gibi yaptığımız işlemler sonunda elde ettiğimiz eşitsizlik doğru bir eşitsizliktir.

BİRİNCİ DERECEDEKİ BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \geq 0$$

$$ax + b < 0$$

$ax + b \leq 0$ biçiminde yazılabilen cebirsel ifadeler, **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜM KÜMESİNİ BULMA VE SAYI DOĞRUSUNDA GÖSTERME

Eşitsizlikleri çözerken esasında denklemleri çözer gibi çözeriz yani bilinmeyeni eşitsizliğin bir tarafında **yalnız bırakırız**. Bu durumu oluştururken de yukarıda öğrendiğimiz özellikleri kullanırız. Birinci derece denklemlerin çözüm kümesinde bir sayı bulunurken birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesi ise bir sayı değil **bir aralıktır**.

Eşitsizliğin çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterirken " \leq veya \geq " sembollerinde başlangıç noktasının içi dolu, "< veya >" sembollerinde başlangıç noktası çözüm kümesine dahil olmadığından içi boş olur.

ÖRNEK: Aşağıda bazı eşitsizliklerin sayı doğrusu üzerinde gösterimi verilmiştir.



$$x \geq -1$$



$$12 \leq x < 15$$



$$x < 2$$

www.matematikciler.org

ÖRNEK: $2x + 3 > 11$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım ve sayı doğrusunda gösterelim.

x 'i yalnız bırakmak için önce her iki taraftan 3 çıkartılır.

$$2x + 3 - 3 > 11 - 3$$

$$2x > 8$$

her iki taraf 2'ye bölünür.

$$x > 4$$

Çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterirken sayı doğrusunda 4'ten büyük olan kısım işaretlenir. -4 sayısı çözüm kümesine dahil olmadığı için içi boş bırakılır.



ÖRNEK: $40 - x \leq 50$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım ve sayı doğrusunda gösterelim.

$$40 - x - 40 \leq 50 - 40$$

$$-x \leq 10$$

eşitsizliğin her iki tarafı -1 ile çarpılır. Negatif sayı ile çarptığımız için aradaki işaretin yön değiştirdiğini unutmayalım.

$$-x \cdot -1 \leq 10 \cdot -1$$

$$x \geq -10$$

Çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterirken sayı doğrusunda -10 ve -10 'dan büyük olan kısım işaretlenir. -10 sayısı çözüm kümesine dahil olduğu için bu sayı da işaretlenir.



--	--

--	--

--	--

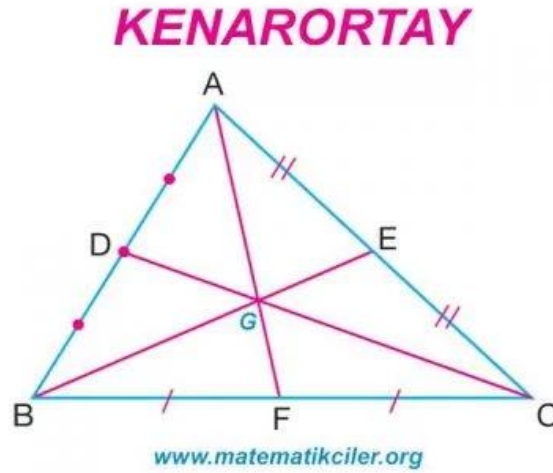
Kenarortay, Açıortay ve Yükseklik

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Üçgende Yardımcı Elemanlar
- √ Kenarortay, Açıortay, Yükseklik
- √ Özel Durumlar, Muhteşem Üçlü

KENARORTAY

Bir üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasını, karşı köşe noktası ile birleştiren doğru parçasına üçgenin o kenarına ait **kenarortay**ı denir. "a" kenarına ait **kenarortay** V_a **sembölü** ile gösterilir.

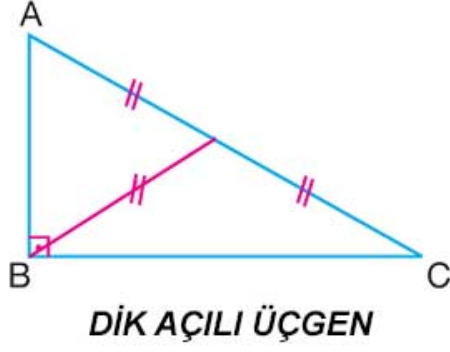


Yukarıdaki resimde [AB] kenarına ait kenarortay [CD], [BC] kenarına ait kenarortay [AF], [CA] kenarına ait kenarortay [BE]'dir.

Kenarortaylar üçgenin iç bölgesindeki bir noktada (G noktasında) kesişmiştir.

Tüm üçgenlerde **kenarortayların kesişim noktası** üçgenin iç bölgesindedir. Bu noktaya **Ağırlık Merkezi** denir ve G harfiyle gösterilir.

MUHTEŞEM ÜÇLÜ



Bir dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

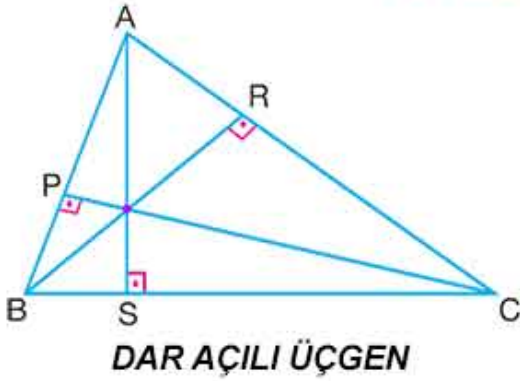
Bu özelliğe **muhteşem üçlü** denir.

www.matematikciler.org

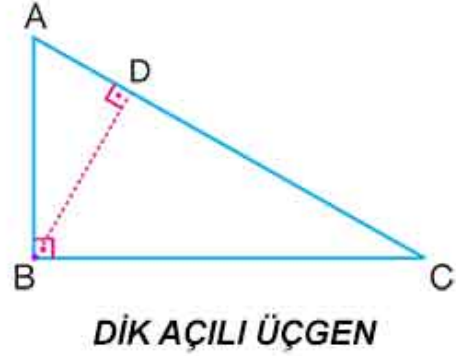
YÜKSEKLİK

Bir üçgenin bir köşesinden karşı kenarına indirilen dik doğru parçasına üçgenin o kenarına ait yüksekliği denir. "a" kenarına ait **yükseklik h_a sembolü** ile gösterilir.

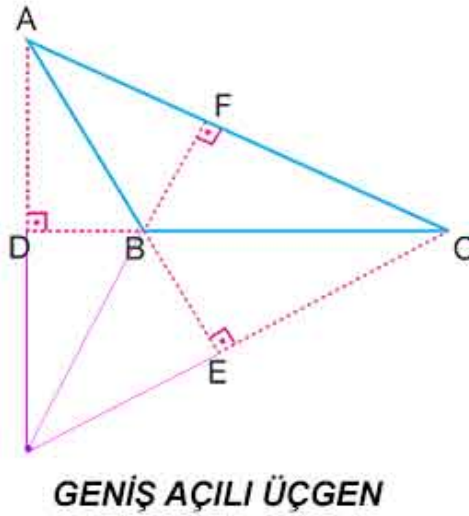
YÜKSEKLİK



DAR AÇILI ÜÇGEN



DİK AÇILI ÜÇGEN



GENİŞ AÇILI ÜÇGEN

www.matematikciler.org

Resimdeki **dar açılı üçgende**: [AB] kenarına ait yükseklik [CP], [BC] kenarına ait yükseklik [AS], [CA] kenarına ait yükseklik [BR]'dir.

Resimdeki **dik açılı üçgende**: [AB] kenarına ait yükseklik [BC], [BC] kenarına ait yükseklik [AB], [CA] kenarına ait yükseklik [BD]'dir.

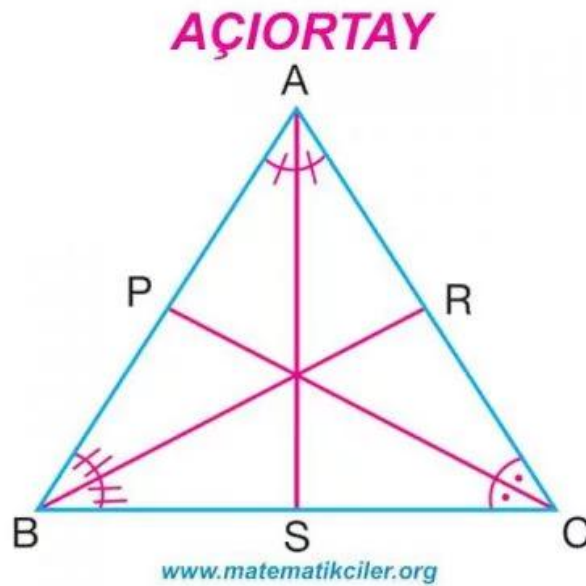
Resimdeki **geniş açılı üçgende**: [AB] kenarına ait yükseklik [CE], [BC] kenarına ait yükseklik [AD], [CA] kenarına ait yükseklik [BF]'dir.

Yüksekliklerin kesişim noktası mor renkli noktadır. Yükseklikler dar açılı üçgende üçgenin iç bölgesinde, dik açılı üçgende üçgenin köşesinde, geniş açılı üçgende üçgenin dış bölgesinde kesişmiştir.

Yüksekliklerin kesişim noktası dar açılı üçgenlerde üçgenin iç bölgesinde, dik açılı üçgenlerde üçgenin üzerinde (dik köşesinde), geniş açılı üçgenlerde ise üçgenin dış bölgesindedir. Bu noktaya **Diklik Merkezi** adı verilir.

AÇIORTAY

Bir üçgenin herhangi bir iç açısını iki eş parçaya ayırarak köşeyi karşı kenara birleştiren doğru parçasına üçgenin iç **açıortayı** denir. "A" açısına ait **açıortay** n_A **sembolü** ile gösterilir.



Yukarıdaki resimde [AB] kenarına ait açıortay [CP], [BC] kenarına ait açıortay [AS], [CA] kenarına ait açıortay [BR]'dir.

Tüm üçgenlerde **açıortayların kesişim noktası** üçgenin iç bölgesindedir.



NOT: Çeşitkenar üçgende bir kenara ait yükseklik, açıortay ve kenarortay arasında; **yükseklik** < **açıortay** < **kenarortay** bağıntısı vardır.

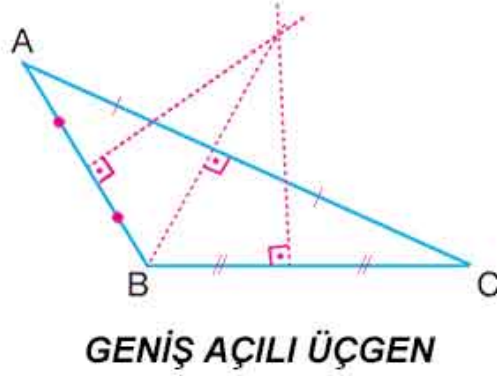
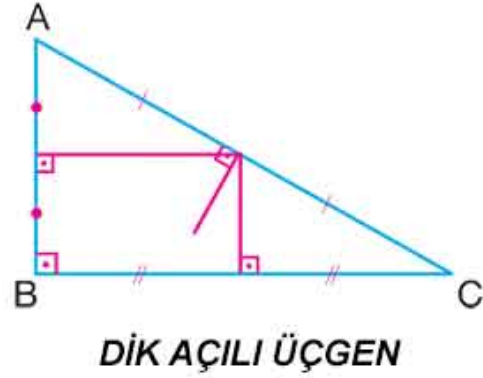
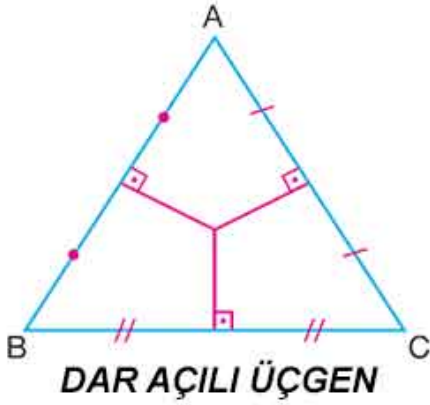
NOT: Eşkenar üçgende bir açının **açıortayı** ile o açının karşısındaki kenarın **kenarortayı** ve **yükseklığı** aynı doğru parçasıdır. Aynı eşitlik ikizkenar üçgende eş kenarlar arasında kalan açının açıortayı ile karşı kenarının kenarortayı ve yüksekliğinde de vardır.

KENAR ORTA DİKME

Kenar orta dikme **8. sınıf müfredatından kaldırıldı** ancak soru bankalarında karşınıza çıkan bir terim olduğu için aşağıdan kenar orta dikme nedir öğrenebilirsiniz.

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına **kenar orta dikme** denir.

KENAR ORTA DİKME



www.matematikciler.org

Kenar orta dikmeler dar açılı üçgenlerde üçgenin iç bölgesinde, dik açılı üçgenlerde üçgenin üzerinde (hipotenüsün orta noktasında), geniş açılı üçgenlerde ise üçgenin dış bölgesinde bir noktada kesişir.

--	--

--	--

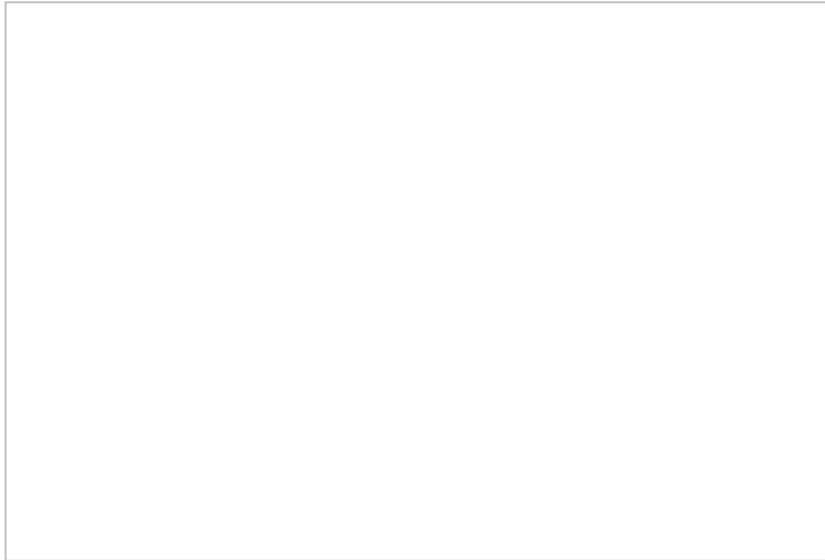
Üçgen Eşitsizliği ve Açı Kenar Bağlılıları

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Üçgenlerin Kenar Uzunlıkları Arasındaki İlişki
- √ Üçgenlerin Kenar Uzunlıkları ile Açılarının Ölçüleri Arasındaki İlişkileri

ÜÇGENLER

Doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren doğru parçalarının meydana getirdiği şekle **üçgen** denir.



KÖŞELERİ: A, B ve C noktaları üçgenin köşeleridir.

KENARLARI: [AB], [BC] ve [AC] üçgenin kenarlarıdır.

KENAR UZUNLUKLARI: a, b ve c üçgenin kenar uzunlıklarıdır.

ÜÇGENLERİN KENAR UZUNLUKLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

(ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ)

Bir üçgende bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür. Bu eşitsizliğe **üçgen eşitsizliği** denir.

Yukarıdaki ABC üçgeni için:

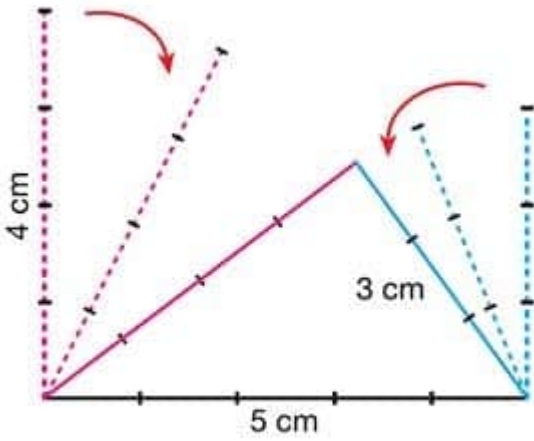
$$a + b > c > |a - b|$$

$$a + c > b > |a - c|$$

$$b + c > a > |b - c| \text{ olur.}$$

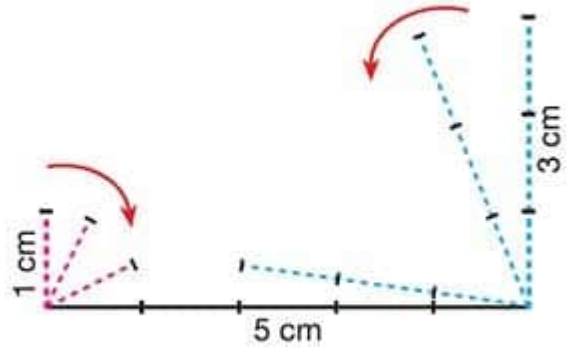
ÖRNEK: Aşağıdaki mavi, kırmızı ve siyah çubukları uç uca ekleyerek üçgen oluşturulabilir mi?

Üç tane doğru parçasını uç uca ekleyerek üçgen elde etmek istiyorsak bu doğru parçalarından herhangi birinin uzunluğu, diğer ikisinin uzunluğunun **toplamından kısa, farkından uzun** olmalıdır.



-1-

www.matematikciler.org



-2-

Yukarıdaki örnekleri inceleyelim.

1. ŞEKİL:

3cm, 4cm, 5cm uzunluğunda üç tane çubuğu uç uca ekleyerek üçgen oluşturabiliriz.

Çünkü bir kenar uzunluğu diğerlerinin toplamından küçük, farkından büyüktür.

$$4 + 3 > 5 > 4 - 3$$

$$7 > 5 > 1$$

2. ŞEKİL:

1cm, 3cm, 5cm uzunluğundaki üç tane çubuğu uç uca ekleyerek üçgen oluşturamayız.

Çünkü bir kenar diğer ikisinin toplamından uzundur.

$$3+1 > 5 > 3-1$$

$$4 > 5 > 2 \text{ (4 sayısı 5'ten büyük değildir.)}$$

ÖRNEK: Aşağıda verilen uzunluklara göre belirtilen üçgenlerin çizilip çizilemeyeceğini bulalım.

1) $|AB| = 8 \text{ cm}$, $|AC| = 4 \text{ cm}$, $|BC| = 10 \text{ cm}$ olan bir ABC üçgeni:

İki kenarı toplar, diğer kenardan büyük mü diye bakarız.

$$8+4 = 12 > 10$$

$$8+10 = 18 > 4$$

$$4+10 = 14 > 8$$

olduğu için çizilebilir.

2) $|DE| = 3 \text{ m}$, $|EF| = 5,5 \text{ m}$, $|DF| = 9 \text{ m}$ olan bir DEF üçgeni:

$$3 + 5,5 = 8,5 > 9 \text{ (8,5 sayısı 9'dan büyük değildir.)}$$

$$5,5 + 9 = 14,5 > 3$$

$$3 + 9 = 12 > 5,5$$

olduğu için çizilemez.

ÖRNEK: Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları 15 cm, 12 cm ise diğer kenarının uzunluğu kaç cm olabilir?

Verilmeyen kenarın uzunluğuna x dersek bu kenarın uzunluğuna dair üçgen eşitsizliğini yazarız.

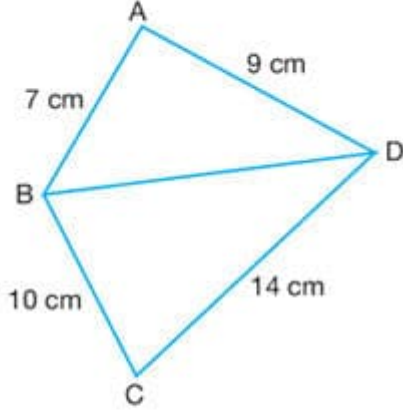
$$15 + 12 > x > 15 - 12$$

$$27 > x > 3$$

Bu kenarın uzunluğu 27 cm ile 3 cm arasında olabilir.

ÖRNEK:

SORU



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre, |BD| aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 4 cm B) 7 cm
C) 10 cm D) 15 cm

ÇÖZÜM

BD kenarının uzunluğuna x diyelim.

ABD üçgeninde:

$$9 + 7 > x > 9 - 7$$

$$16 > x > 2$$

BCD üçgeninde:

$$14 + 10 > x > 14 - 10$$

$$24 > x > 4$$

İki üçgende eşitsizlikleri sağlayacak

x değerleri:

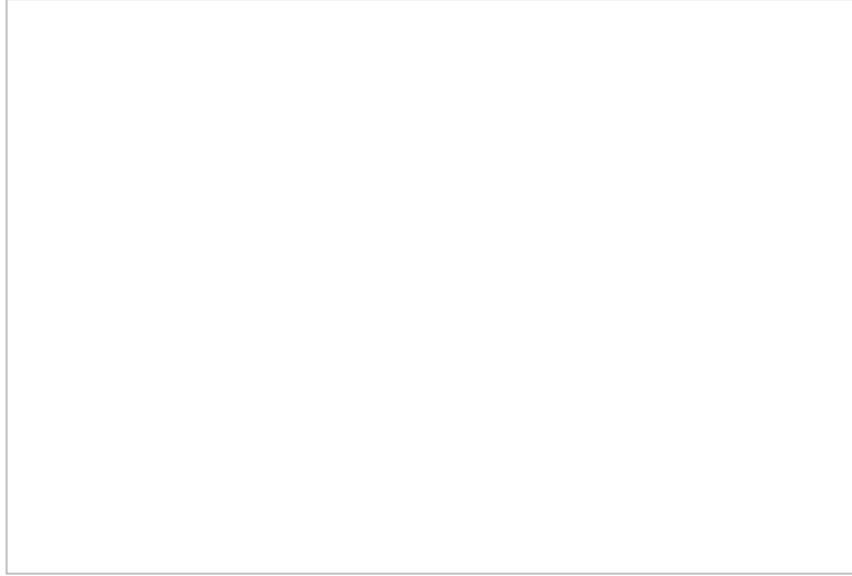
$$16 > x > 4$$

BD kenarının uzunluğu
4 ile 16 arasında olabilir.

CEVAP A SEÇENEĞİ

www.matematikciler.org

ÜÇGENDE AÇI KENAR BAĞINTILARI



Bir üçgende küçük açı karşısında kısa kenar, büyük açı karşısında uzun kenar vardır.

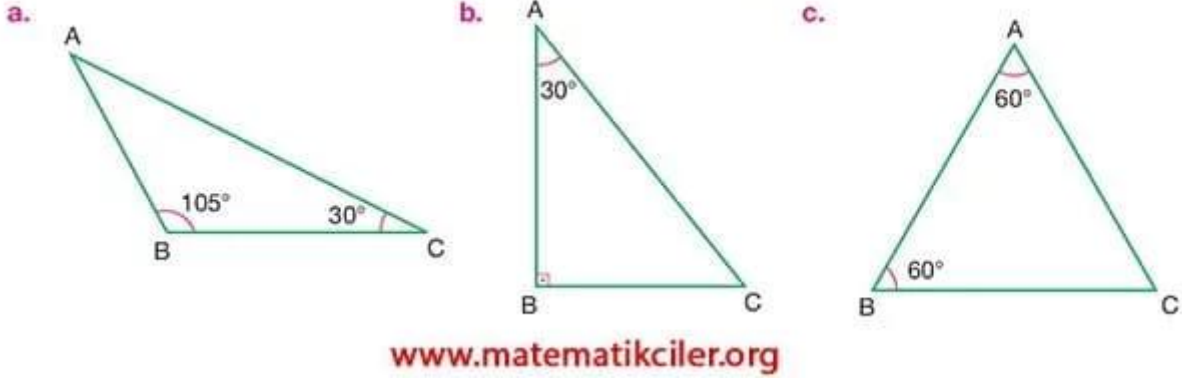
$$s(\hat{A}) > s(\hat{B}) > s(\hat{C}) \text{ ise } a > b > c \text{ olur.}$$

Eğer açılar eşit ise bu açılar karşısındaki kenarlar da eşittir.

Dik açılı üçgenlerde, dik açıdan daha büyük açı olamayacağı için hipotenüsün (dik açının karşısındaki kenar) uzunluğu dik kenarların uzunluklarından daha büyüktür.

Geniş açılı üçgenlerde geniş açıdan daha büyük açı olamayacağı için en uzun kenar geniş açının karşısındadır.

ÖRNEK: Aşağıda iki iç açısının ölçüsü verilen üçgenlerin kenar uzunluklarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.



Sorunun a şikkındaki üçgende:

Verilmeyen A açısının ölçüsünü buluruz.

$$105^{\circ} + 30^{\circ} = 135^{\circ}$$

$$180^{\circ} - 135^{\circ} = 45^{\circ}$$

Şimdi açıların büyüklüğüne göre kenarları sıralarız: $|AC| > |BC| > |AB|$

Sorunun b şikkındaki üçgende:

Verilmeyen B açısının ölçüsünü buluruz.

$$90^{\circ} + 30^{\circ} = 120^{\circ}$$

$$180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$$

Şimdi açıların büyüklüğüne göre kenarları sıralarız: $|AC| > |AB| > |BC|$

Sorunun c şikkındaki üçgende:

Verilmeyen C açısının ölçüsünü buluruz.

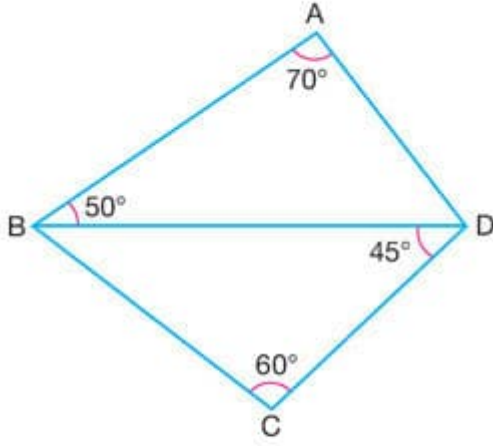
$$60^{\circ} + 60^{\circ} = 120^{\circ}$$

$$180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$$

Eşit açıların karşısındaki kenarların uzunlukları eşit olduğu için: $|AC| = |AB| = |BC|$

ÖRNEK:

SORU

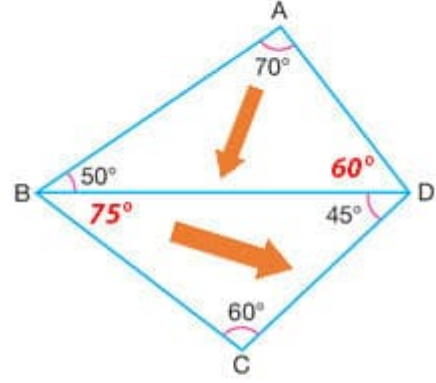


Şekilde verilenlere göre, en uzun kenar aşağıdakilerden hangisidir?

- A) IADI B) IBDI
C) ICDI D) IABI

ÇÖZÜM

Üçgenlerde verilmeyen açıları buluruz.



ABD üçgeninde en uzun kenara ok çizeriz.
BCD üçgeninde de en uzun kenara ok çizeriz.
Bu *iki oku takip ederek* karşılaştığımız kenar en uzun kenardır.

CEVAP C SEÇENEĞİ

www.matematikciler.org

Üçgen Çizimleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Kenar Uzunlukları Verilen Üçgeni Çizme
- √ Bir Kenar Uzunluğu ve İki Açının Ölçüsü Verilen Üçgeni Çizme
- √ Bir Açısının Ölçüsü ve İki Kenar Uzunlukları Verilen Üçgeni Çizme

ÜÇGEN ÇİZİMİ İÇİN GEREKLİ ŞARTLAR

Üçgenin temel elemanları, kenarları ve açılarıdır. Belirli bir üçgenin çizilebilmesi için bu temel elemanlardan en az üç tanesi bilinmeli ve bu bilgilerden en az biri kenar uzunluğu olmalıdır.

Üç kenar uzunluğu, iki kenar uzunluğu ile bu kenar arasındaki açının ölçüsü veya bir kenarının uzunluğu ile iki açısının ölçüsü verilen bir üçgen cetvel, açıölçer ve pergel kullanılarak çizilebilir.

Şimdi yeterli elemanı verilen üçgenler nasıl çizilir öğrenelim.

ÜÇGEN ÇİZİMLERİ

1) ÜÇ KENARININ UZUNLUĞU VERİLEN ÜÇGENİN ÇİZİMİ

Üç kenar uzunluğu verilen bir üçgen cetvel ve pergel kullanılarak çizilebilir.

ÖRNEK: Kenar uzunlukları 4 cm, 5 cm ve 6 cm olan üçgeni çizelim.

1. ADIM: Cetvel yardımıyla herhangi bir kenar çizilir.

4 cm uzunluğunda bir [AB] çizelim.

2. ADIM: Pergel, geriye kalan kenarlardan biri kadar açılır ve 1. adımda çizilen doğru parçasının bir ucuna konulur ve bir yay çizilir.

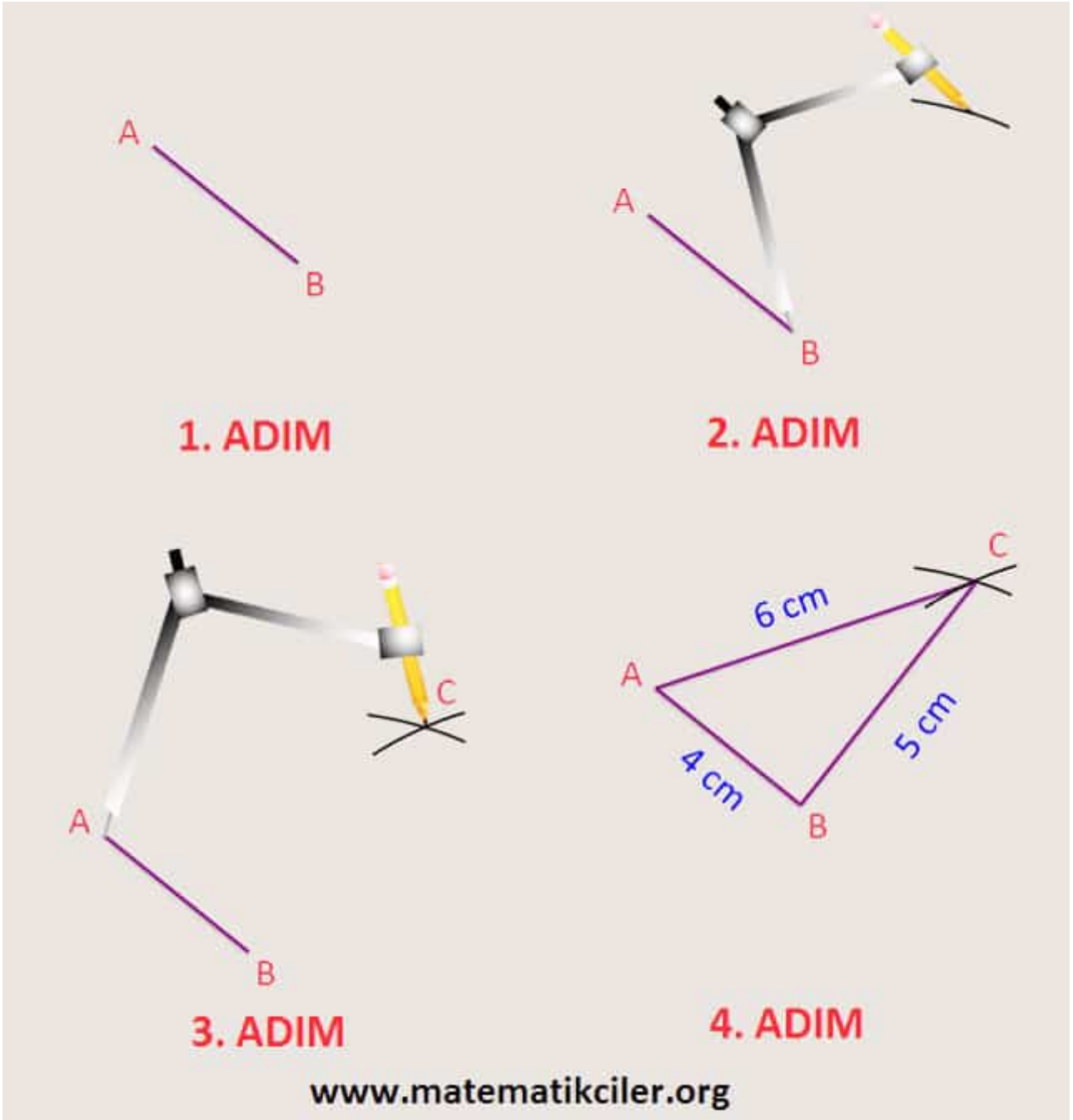
B noktasını merkez olarak pergelle 5 cm yarıçaplı bir yay çizelim.

3. ADIM: Bu sefer pergel son kalan kenarın uzunluğu kadar açılır ve 1. adımda çizilen doğru parçasının diğer ucuna koyup 2. adımda çizdiğimiz yayla kesişecek bir yay çizilir.

A noktasını merkez olarak pergelle 6 cm yarıçaplı bir yay çizelim. Bu yayın diğer yayla kesiştiği noktayı C olarak isimlendirelim.

4. ADIM: Bu yayların kesişim noktası, 1. adımda çizilen doğru parçasının uçları ile birleştirilerek üçgen oluşturulur.

Cetvel kullanarak C noktasını A ve B noktaları ile birleştirelim.



2) İKİ KENAR UZUNLUĞU VE BİR AÇISININ ÖLÇÜSÜ VERİLEN ÜÇGENİN ÇİZİMİ

İki kenar uzunluğu ile bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü verilen bir üçgen açıölçer ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

ÖRNEK: $|KL| = 5$ birim, $|KM| = 4$ birim ve $m(LKM)=60^\circ$ olan bir KLM üçgeni çizelim.

1. ADIM: Cetvel yardımıyla verilen bir kenar çizilir.

5 birim uzunluğundaki [KL]'ni çizelim.

2. ADIM: Çizilen doğru parçasının ucuna verilen açı oluşturulur.

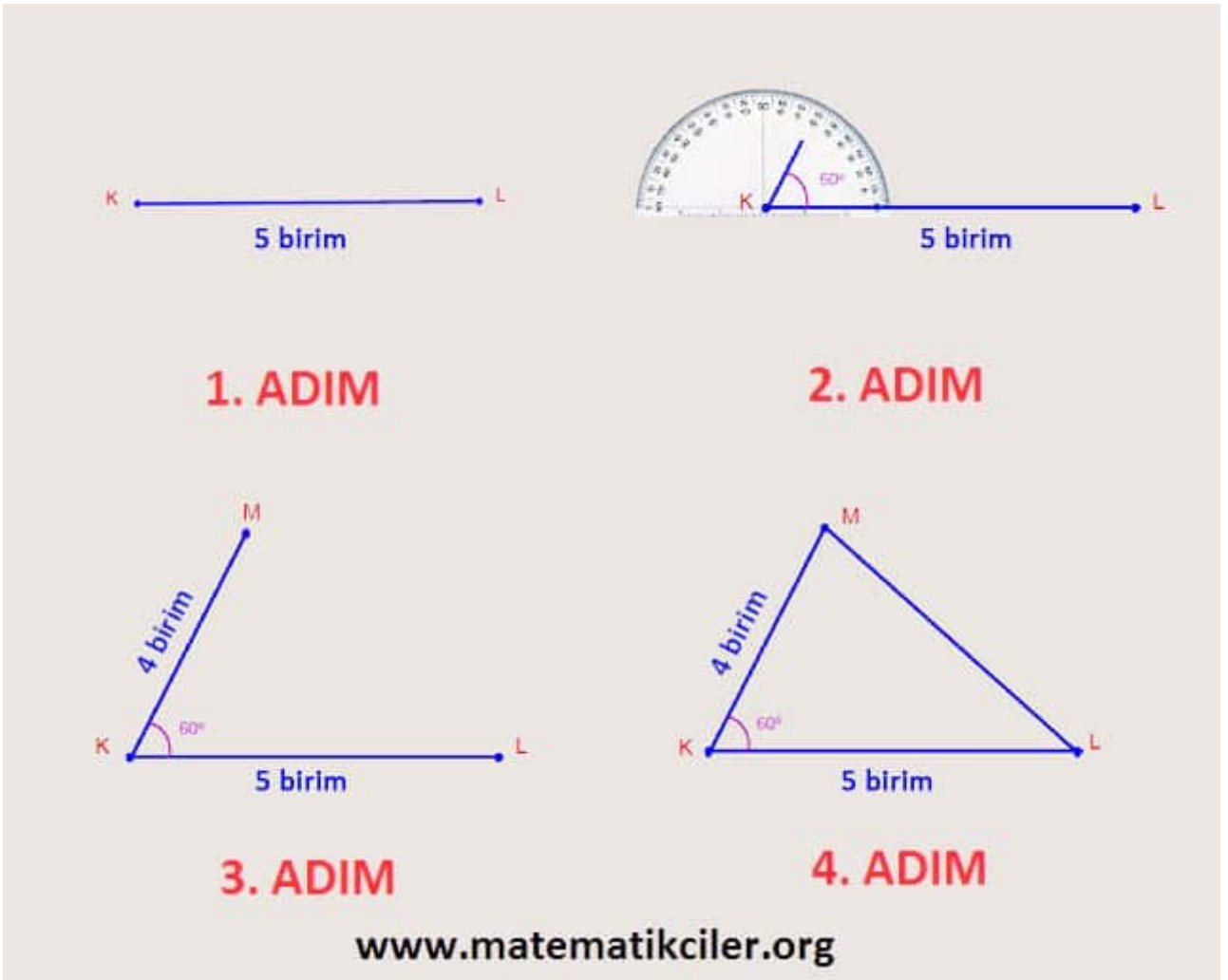
K noktasını merkez alarak açıölçerle ölçüsü 60° olan LKM açısını çizelim.

3. ADIM: Verilen diğer kenar, 1. adımda çizdiğimiz kenarın ucuna 2. adımda oluşturduğumuz açığı yapacak şekilde çizilir.

Uzunluğu 4 birim olan [KM]'ni çizelim.

4. ADIM: Çizilen kenarların uçları birleştirilerek üçgen oluşturulur.

M ve L noktalarını bir doğru parçasıyla birleştirelim ve KLM üçgenini elde edelim.



3) BİR KENAR UZUNLUĞU VE İKİ AÇISININ ÖLÇÜSÜ VERİLEN ÜÇGENİN ÇİZİMİ

Bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait açılarının ölçüleri verilen bir üçgen açıölçer ve cetvel yardımıyla çizilebilir.

ÖRNEK: $|DE| = 6 \text{ cm}$, $m(\angle DEF) = 45^\circ$ ve $m(\angle EDF) = 55^\circ$ olan bir DEF üçgeni çizelim.

1. ADIM: Cetvel yardımıyla verilen kenar çizilir.

6 cm uzunluğunda bir [DE] çizelim.

2. ADIM: Açı ölçer yardımıyla 1. adımdaki doğru parçasının bir ucuna, o köşe için verilen açıyı oluşturacak şekilde bir doğru parçası çizilir.

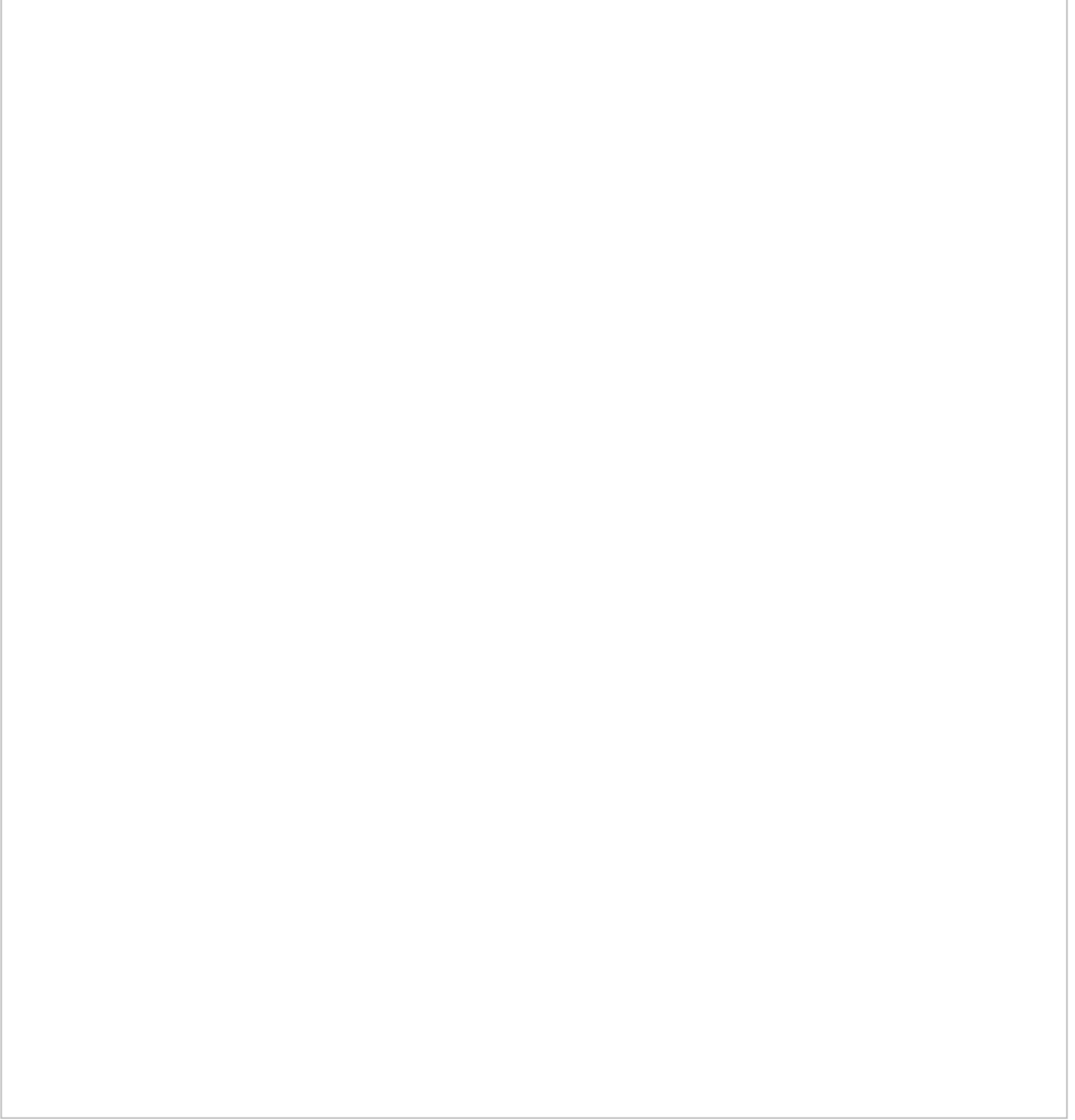
Açıölçeri kullanarak ölçüsü 45° olan DEF açısını oluşturalım.

3. ADIM: Açı ölçer yardımıyla 1. adımdaki doğru parçasının diğer ucuna, o köşe için verilen açıyı oluşturacak şekilde bir doğru parçası çizilir.

Benzer şekilde ölçüsü 55° olan EDF açısını oluşturalım.

4. ADIM: Çizdiğimiz bu kollar kesiştirilerek üçgen oluşturulur.

Bu iki açının kollarını üçgen oluşturacak şekilde uzatarak birleştirelim.



Sadece üç açısının ölçüsü verilen (herhangi bir kenar uzunluğu verilmeyen) belirli bir üçgen çizilemez. Bu bilgilerle sonsuz farklı üçgen çizilebilir.

ÖRNEK: Bütün açıları 60° olan bir üçgen çizelim. Bu üçgen eşkenar üçgendir ve her boyutta eşkenar üçgen çizebileceğimiz için belirli bir üçgen çizemeyiz.

--	--

Pisagor Teoremi (Pisagor Bağıntısı)

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Pisagor Teoremi Nedir?
- √ Pisagor Teoremi Ne İŖe Yarar?
- √ Kenar Uzunlukları Tam Sayı Olan Özel Dik Üçgenler

PİSAGOR KİMDİR?

Pisagor M.Ö. 500'lü yıllarda yaşamış Yunan filozof ve matematikçisidir. Matematik ve Müziği buluşturan Pisagor, kendi adıyla anılan Pisagor Teoremi ile meşhurdur. Pisagor'un hayatı hakkında daha fazla bilgi için: Pisagor'un hayatı

PİSAGOR BAĞINTISI NEDİR?

Mısır'da Nil Nehri'nde bahar aylarında meydana gelen taşkınlar nedeniyle arazi sınırları sürekli deęiŖiyor bu nedenle de arazilerin sınırlarının sıklıkla yeniden belirlenmesi gerekiyordu. Bu amaçla dik kenar uzunlukları bilinen dik üçgenlerin hipotenüs uzunluğunu veren bir bağıntı kullanılıyordu. Yunanlı matematikçi Pisagor'un (Pythagoras) adıyla anılan **Pisagor bağıntısında bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eŖittir**. Bu bağıntının ilk kez ne zaman ve kimin tarafından kullanıldığı tam olarak bilinmemekle beraber, bağıntının ilk kez Pisagor tarafından ispat edildiği düşünölmektedir. ¹ Ayrıca Ŗuraya da bakabilirsiniz: Pisagor Teoremi'nin İspatları

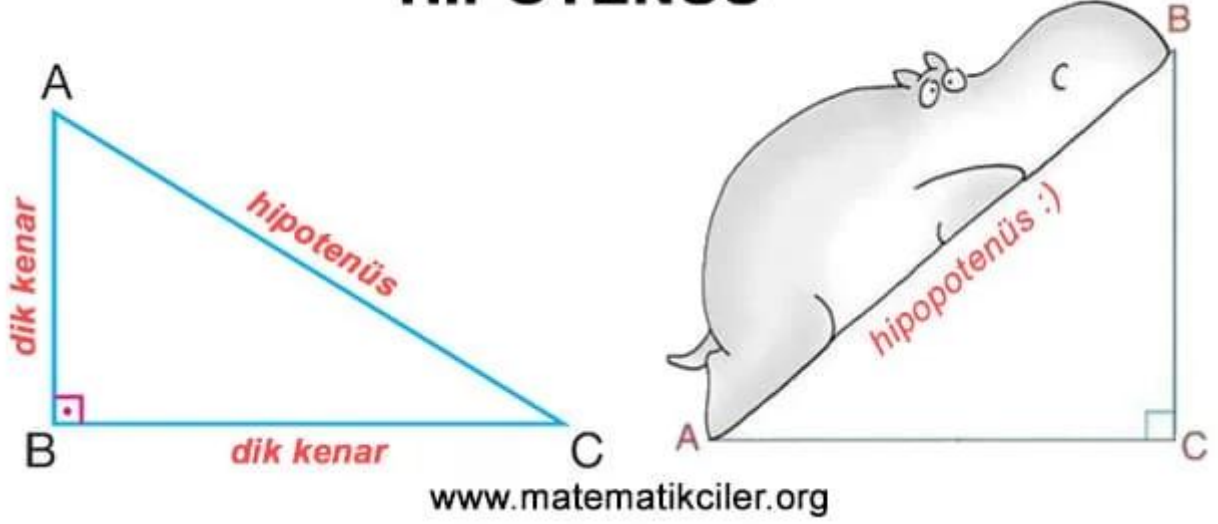
PİSAGOR BAĞINTISI NE İŖE YARAR?

Pisagor bağıntısını kullanarak bir dik üçgende herhangi iki kenarın uzunluğunu biliyorsak üçüncü kenarın uzunluğunu bulabiliriz. Ayrıca kenar uzunlukları verilen bir üçgenin dik üçgen olup olmadığını, hatta dar açılı üçgen mi geniŖ açılı üçgen mi olduğunu belirleyebiliriz.

DİK ÜÇGEN VE PİSAGOR BAĞINTISI

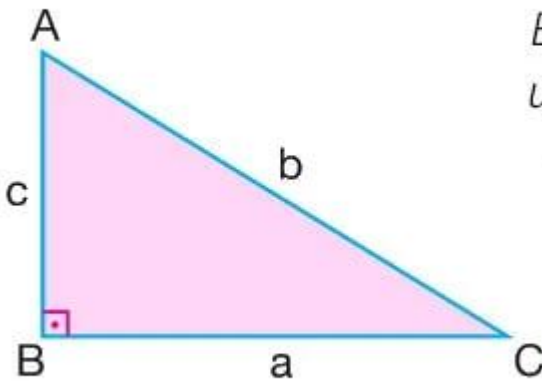
Bildiğiniz gibi bir açısının ölçüsü 90° olan üçgene **dik üçgen** denir. Dik üçgende 90 derecelik açının karşısındaki kenarın özel bir adı vardır. 90 derecelik açının karşısındaki kenara **hipotenüs** adı verilir. Bu kenarın en uzun kenar olduğunu zaten Üçgende Açı-Kenar Bağlılıları konusundan biliyorsunuz. Hipotenüs dışında geriye kalan birbirine dik olan kenarlara da **dik kenarlar** diyoruz.

HİPOTENÜS



Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki bu ilişkiye **Pisagor bağıntısı** denir.

PİSAGOR BAĞINTISI



Bir dik üçgende, dik kenarların uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.

$$b^2 = a^2 + c^2$$

www.matematikciler.org

Şimdi gelin pisagor bağıntısını bir örnekte kullanalım.

ÖRNEK: Dik kenarlarının uzunlukları 3 cm ve 4 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu kaç santimetredir?

ÇÖZÜM: Hipotenüsün uzunluğuna x diyerek pisagor bağıntısını yazarsak:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25$$

Burada bize x 'in kaç olduğu lazım. x 'in karesi 25'miş. "Hangi sayının karesi 25'tir?" sorusunu sorarak cevabı 5 buluruz. Tabii işler her zaman bu kadar kolay olmayabilir. Hipotenüsün karesi her zaman tam kare bir sayı olmayabilir. O yüzden şöyle bir yol izleyelim. "Bu sayı hangi sayının karesidir?" diye kendimize sormaktansa bu soruyla aynı anlamı taşıyan karekök alma işlemini kullanalım. Burada her iki tarafın karekökünü alabiliriz.

$$x^2 = 25 \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$x = 5 \text{ bulunur.}$$

x^2 karekök dışına x olarak çıkar, 25 de karekök dışına 5 olarak çıkar ve sonuca ulaşırız.

ÖRNEK: Hipotenüsünün uzunluğu 13 m olan ve dik kenarlarından birinin uzunluğu 5 m olan bir dik üçgenin diğer dik kenarının uzunluğunu bulalım.

ÇÖZÜM: Bu sefer verilmeyen dik kenarın uzunluğuna x diyeceğiz ve pisagor teoremini buna göre yazacağız:

$$13^2 = 5^2 + x^2$$

$$169 = 25 + x^2$$

$$169 - 25 = x^2$$

$$144 = x^2$$

$$\sqrt{144} = \sqrt{x^2}$$

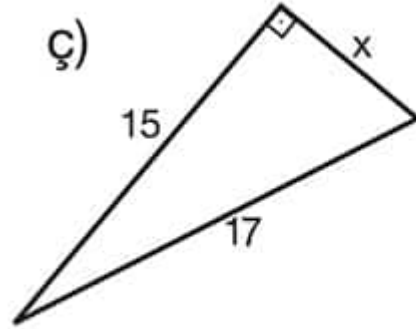
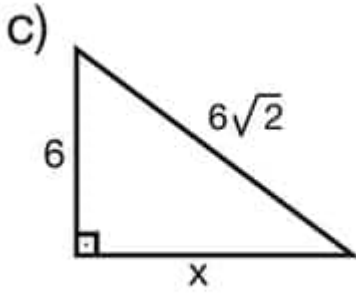
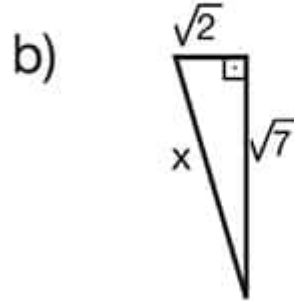
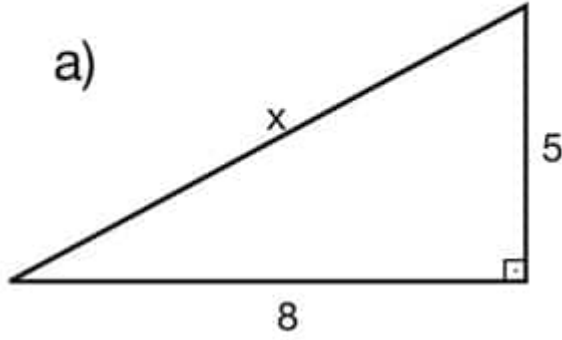
$$12 = x$$

Bilinmeyeni yalnız bırakma adına +25'i eşitliğin karşı tarafına -25 olarak gönderdik. Bilinmeyeni bulmak için her iki tarafın karekökünü aldık ve cevabı 12 metre bulduk.

Hipotenüsün uzunluğunun ve bir dik kenarın uzunluğunun verildiği sorularda diğer dik kenarın uzunluğunun karesini bulmak için hipotenüsün uzunluğunun karesinden verilen dik kenarın uzunluğunun karesini çıkarırız.

ÖRNEKLER:

Aşağıdaki dik üçgenlerde verilmeyen kenar uzunluklarını bulalım.



www.matematikciler.org

ÇÖZÜMLER:

A Sorusu

$$x^2 = 5^2 + 8^2$$

$$x^2 = 25 + 64$$

$$x^2 = 89$$

$$x = \sqrt{89}$$

B Sorusu

$$x^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 = 7 + 2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

C Sorusu

$$x^2 + 6^2 = (6\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + 36 = 72$$

$$x^2 = 72 - 36$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

Ç Sorusu

$$x^2 + 15^2 = 17^2$$

$$x^2 + 225 = 289$$

$$x^2 = 289 - 225$$

$$x^2 = 64$$

$$x = 8$$

KENAR UZUNLUKLARI TAM SAYI OLAN ÖZEL DİK ÜÇGENLER

Örneklerde de gördüğümüz gibi bazı üçgenler var ki kenar uzunluklarının hepsi tam sayı. Bu üçgenler sorularda sıkça sorulmaktadır. Elbette bunları ezberlemek zorunda değiliz. Pisagor bağıntısı kullanarak verilmeyen kenar uzunluğunu bulabiliriz. Ancak bunları bilmek soru çözümünde size zaman kazandırır ki zaten sorularda karşınıza çıka çıka bunlardan bazılarını istemeden de olsa ezberleyeceksiniz 😊

Burada yazan üçgenlerde en uzun kenarın hipotenüs olduğunu unutmayın. Sonra soruda 3'ü ve 4'ü görüp dik kenarlardan birine 5 yazmayın. (Malumunuzdur ki dik kenarlar hipotenüsten kısa olmak zorundadır.)

3 - 4 - 5 üçgeni

5 - 12 - 13 üçgeni

6 - 8 - 10 üçgeni (3-4-5'in 2 katı)

7 - 24 - 25 üçgeni

8 - 15 - 17 üçgeni

9 - 12 - 15 üçgeni (3-4-5'in 3 katı)

.... şeklinde bu liste sonsuza kadar uzatılabilir. Burada yazanlar sıkça karşınıza çıkabilecek olanlardır. Bunların katları da alınabilir.

Bu konunun devamı olan **Pisagor Problemleri** konusuna göz atmayı unutmayın.

(1) MEB Yayınları 8. Sınıf Matematik Ders Kitabı 2014 Baskı

--	--

--	--

--	--

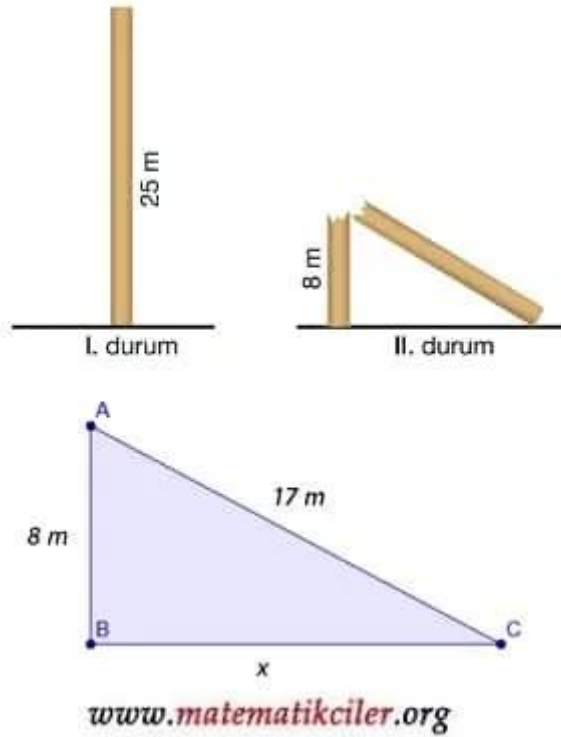
Pisagor Bağıntısı Problemleri

BU KONUDA ÖğRENECEKLERİMİZ:

√ Pisagor teoremi ile ilgili problemler nasıl çözülr?

Pisagor bağıntısını öğrendikten sonra sıra geldi bu bilgilerimizi problem çözümede kullanmaya. Pisagor bağıntısı ile ilgili problemlere geçmeden önce Pisagor bağıntısı konu anlatımına göz atmanızda fayda var: Pisagor Bağıntısı

PROBLEM-1



Uzunluğu 25 m olan bir direk, yıldırım düşmesi nedeniyle şekildeki gibi kırılıyor. Son durumda direğin uç noktası direkten ne kadar uzakta olur?

ÇÖZÜM: II. durumda oluşan üçgeni çizelim. Direğin tamamının boyu 25 metredir ve 8 metrelik kısmı dik olarak kaldığı için geriye kalan 17 metrelik kısmı hipotenüsü oluşturur. Soruda bizde bu dik üçgenin verilmeyen kenarının uzunluğu sorulmaktadır. Bu uzunluk pisagor bağıntısı ile bulunabilir.

$$8^2 + x^2 = 17^2$$

$$64 + x^2 = 289$$

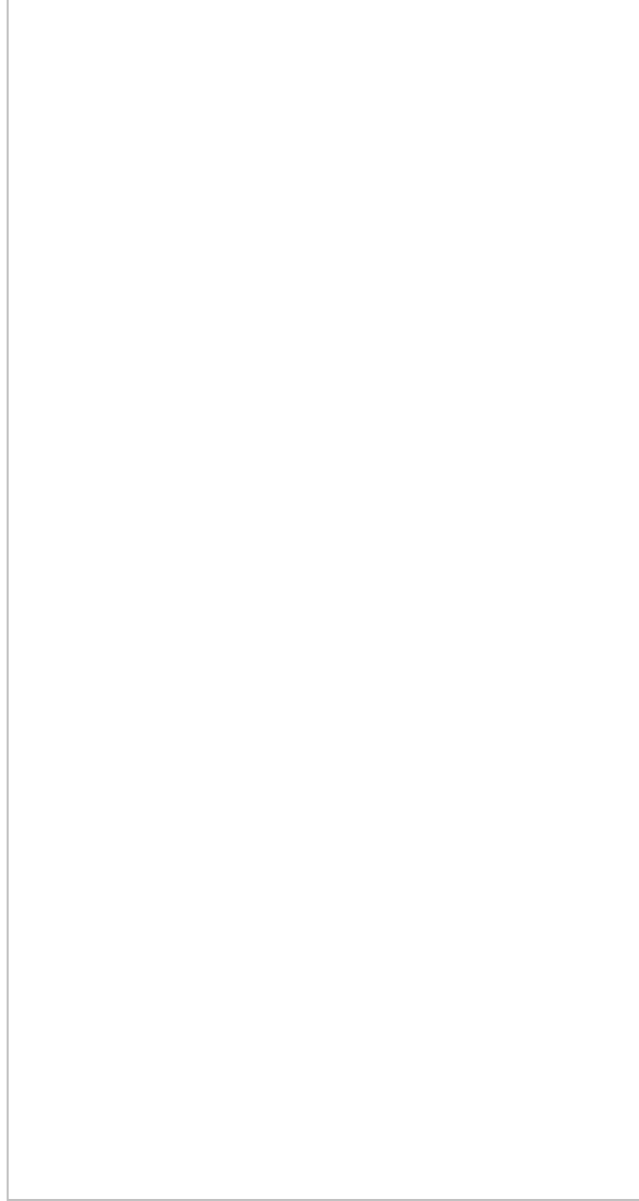
$$x^2 = 289 - 64$$

$$x^2 = 225$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{225}$$

$$x = 15$$

PROBLEM-2



Bir mahallenin krokisinin bir kısmı yandaki şekilde verilmiştir. Verilenlere göre Cumhuriyet Caddesi'nin kroki üzerindeki uzunluğu kaç cm olur?

ÇÖZÜM: Soruda iki tane dik üçgen bulunmaktadır. Cumhuriyet Caddesi'nin uzunluğunu bulmak için Ata Caddesi'nin uzunluğunu bulmamız gerekiyor. Pisagor bağıntısını kullanarak Ata Caddesi'nin uzunluğu şu şekilde bulunur:

$$12^2 + 16^2 = a^2$$

$$144 + 256 = a^2$$

$$400 = a^2$$

$$\sqrt{400} = \sqrt{a^2}$$

$$20 = a$$

Şimdi Cumhuriyet Caddesi'nin uzunluğunu diğer üçgende Pisagor bağıntısını kullanarak bulabiliriz.

$$15^2 + 20^2 = c^2,$$

$$225 + 400 = c^2$$

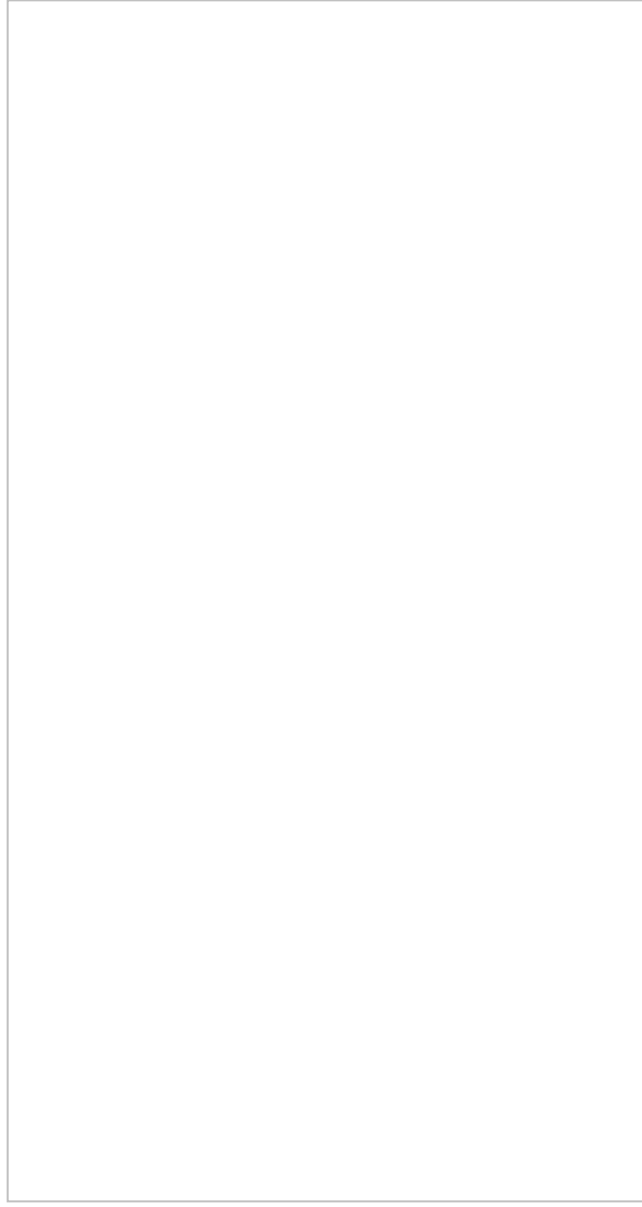
$$625 = c^2$$

$$\sqrt{625} = \sqrt{c^2}$$

$$25 = c$$

Cumhuriyet Caddesinin krokideki boyunun 25 cm olduğunu bulduk.

PROBLEM-3



Yere dik olan duvara bir merdiven resimdeki gibi iki farklı şekilde yaslanıyor. Merdivenin alt ucu ile duvar arasındaki mesafe 4 m iken üst ucu yerden $\sqrt{2}m$ yukarıda olduğuna göre, alt ucu ile duvar arasındaki mesafe 3 m iken üst ucunun yerden yüksekliği kaç metre olur?

ÇÖZÜM: İki durumda da dik üçgen oluşmuştur. Birinci durumdan merdivenin uzunluğunu (m diyelim) bulup ikinci durumdan yüksekliği (y diyelim) bulabiliriz. Bu yüzden önce 1. durumdaki üçgende Pisagor bağıntısı uygularız:

$$4^2 + (\sqrt{2})^2 = m^2$$

$$16 + 2 = m^2$$

$$18 = m^2$$

$$\sqrt{18} = m$$

Merdivenin uzunluğunu bulduk. İkinci durumdaki merdiven aynı merdiven olduğu için burada Pisagor teoremi uygulayarak merdiven ucunun yerden yüksekliğini bulabiliriz:

$$3^2 + y^2 = (\sqrt{18})^2$$

$$9 + y^2 = 18$$

$$y^2 = 9$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{9}$$

$$y = 3$$

Merdivenin ucunun 2. durumda yerden yüksekliğini 3 metre olarak bulduk.

--	--

--	--

--	--

--	--

Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

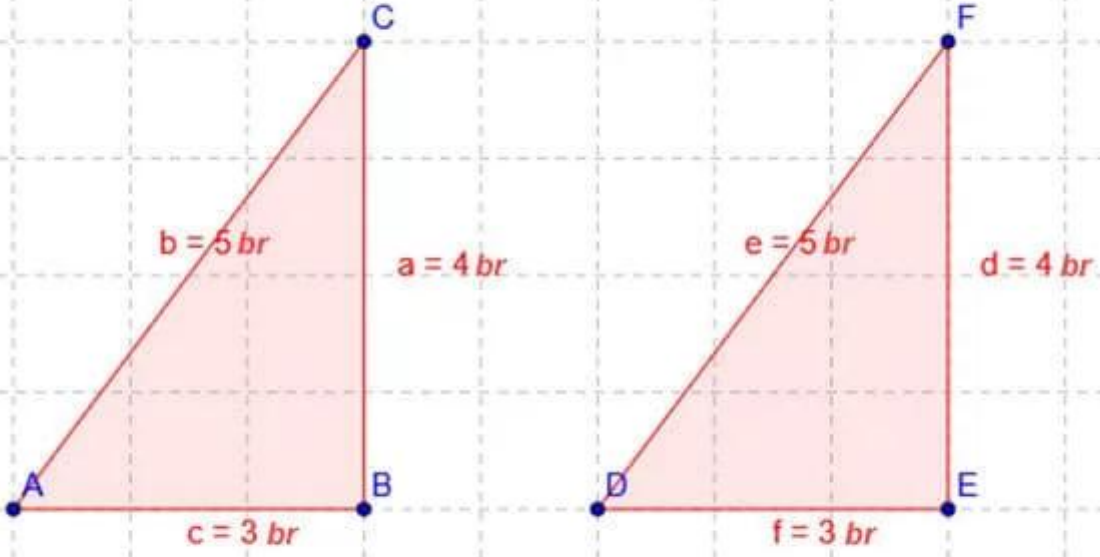
- √ Üçgenlerde Eşlik Nedir?
- √ Üçgenlerde Benzerlik Nedir?
- √ Üçgenlerde Eşlik Şartları
- √ Üçgenlerde Benzerlik Şartları

ÜÇGENLERDE EŞLİK

İki üçgenin karşılıklı kenarının uzunlukları ve açılarının ölçüleri birbirine eşit ise bu üçgenler **eş üçgenler**dir.

İki üçgenin eşliği " \cong " sembolü ile gösterilir. Sembolle gösterirken eş olan açılar aynı sırada yazılmalıdır.

ÜÇGENLERDE EŞLİK



Yukarıdaki iki üçgenin karşılıklı tüm açılarının ölçüleri ve kenar uzunlukları birbirine eşit olduğu için bu iki üçgen eşittir. Bu eşlik sembolle şu şekilde gösterilir:

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$$

www.matematikciler.org

ÜÇGENLERDE EŞLİK ŞARTLARI

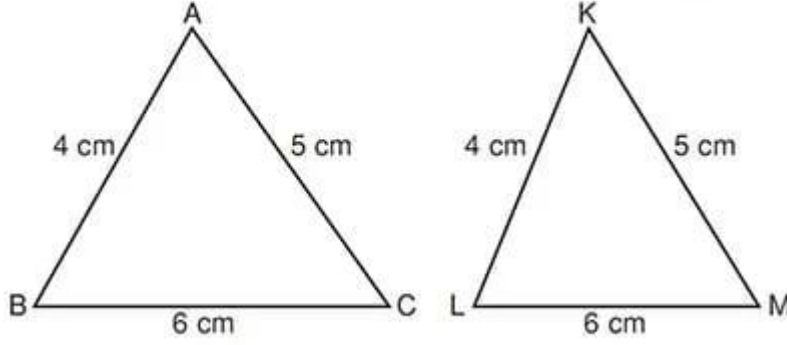
İki üçgenin karşılıklı tüm kenarlarının uzunlukları ve tüm açılarının ölçüleri eşitse bu iki üçgen eşittir. Ancak iki üçgenin tüm kenarları ve tüm açıları her zaman verilmeyebilir. Böyle durumlarda bu kısıtlı verilere bakarak da biz iki üçgenin eş olup olmadığına kanaat getirebiliriz. Bunun için aşağıdaki eşlik şartlarını kullanırız. Eğer iki üçgen arasında bu şartlardan biri sağlanıyorsa bu iki üçgen eşittir diyebiliriz.

1) Kenar - Kenar - Kenar Eşlik Şartı (KKK)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında karşılıklı **tüm kenar uzunlukları eşit** ise bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buna; Kenar - Kenar - Kenar (KKK) eşlik şartı denir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Kenar-Kenar-Kenar eşlik şartına göre eşittir.

Kenar - Kenar - Kenar (KKK) Eşlik Şartı



$$|AB| = |KL| = 4 \text{ cm}$$

$$|AC| = |KM| = 5 \text{ cm}$$

$$|BC| = |LM| = 6 \text{ cm}$$

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{KLM}$$

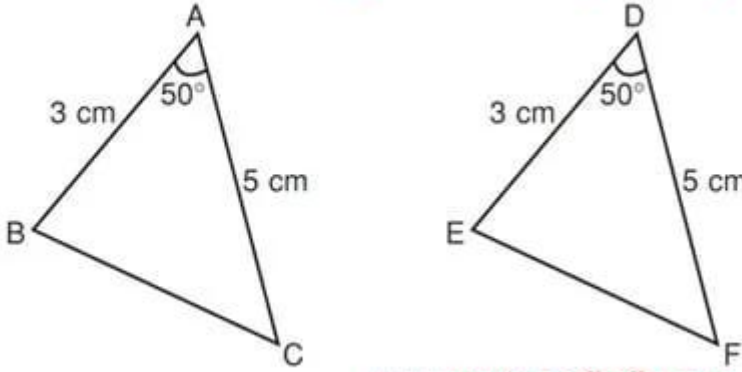
www.matematikciler.org

2) Kenar - Açı - Kenar Eşlik Şartı (KAK)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında **ikişer kenar uzunlukları ve bu iki kenar arasında kalan açılarının ölçüleri eşit ise** bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buna; Kenar - Açı - Kenar (KAK) eşlik şartı denir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Kenar-Açı-Kenar eşlik şartına göre eştir.

Kenar - Açı - Kenar (KAK) Eşlik Şartı



$$|AB| = |DE| = 3 \text{ cm}$$

$$|AC| = |DF| = 5 \text{ cm}$$

$$s(\widehat{A}) = s(\widehat{D}) = 50^\circ$$

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$$

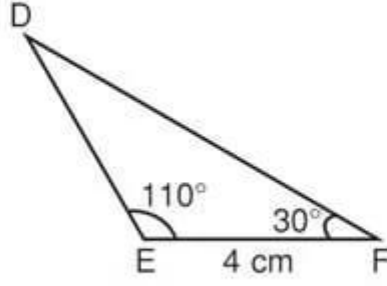
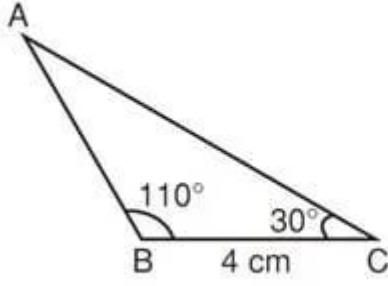
www.matematikciler.org

3) Açı - Kenar - Açı Eşlik Şartı (AKA)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında **ikişer açılarının ölçüleri ve bu iki açı arasında kalan kenar uzunlukları eşit ise** bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buna; Açı - Kenar - Açı (AKA) eşlik şartı denir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Açı-Kenar-Açı eşlik şartına göre eştir.

Açı - Kenar - Açı (AKA) Eşlik Şartı



$$s(\widehat{B}) = s(\widehat{E}) = 110^\circ$$

$$|BC| = |EF| = 4 \text{ cm}$$

$$s(\widehat{C}) = s(\widehat{F}) = 30^\circ$$

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$$

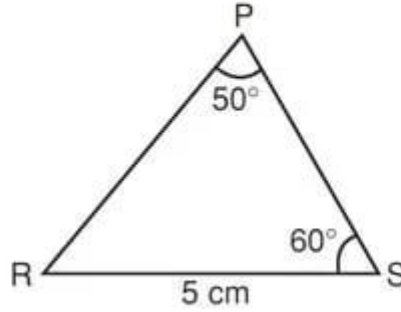
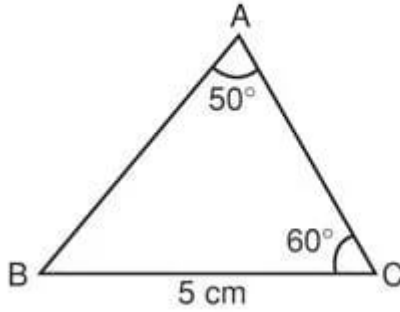
www.matematikciler.org

4) Kenar - Açı - Açı Eşlik Şartı (KAA)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında **ikişer açılarının ölçüleri ve bu açılardan herhangi birinin karşısındaki kenarın uzunlukları eşit ise** bu üçgenler eş üçgenlerdir. Buna; Kenar - Açı - Açı (KAA) eşlik şartı denir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Kenar-Açı-Açı eşlik şartına göre eştir.

Kenar - Açı - Açı (KAA) Eşlik Şartı



$$s(\widehat{A}) = s(\widehat{P}) = 50^\circ$$

$$s(\widehat{C}) = s(\widehat{S}) = 60^\circ$$

$$|BC| = |RS| = 5 \text{ cm}$$

$$\widehat{ABC} \cong \widehat{PRS}$$

www.matematikciler.org

ÜÇGENLERDE BENZERLİK

İki üçgenin karşılıklı açılarının ölçüleri birbirine eşit ve karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı ise bu üçgenler **benzer üçgenlerdir**.

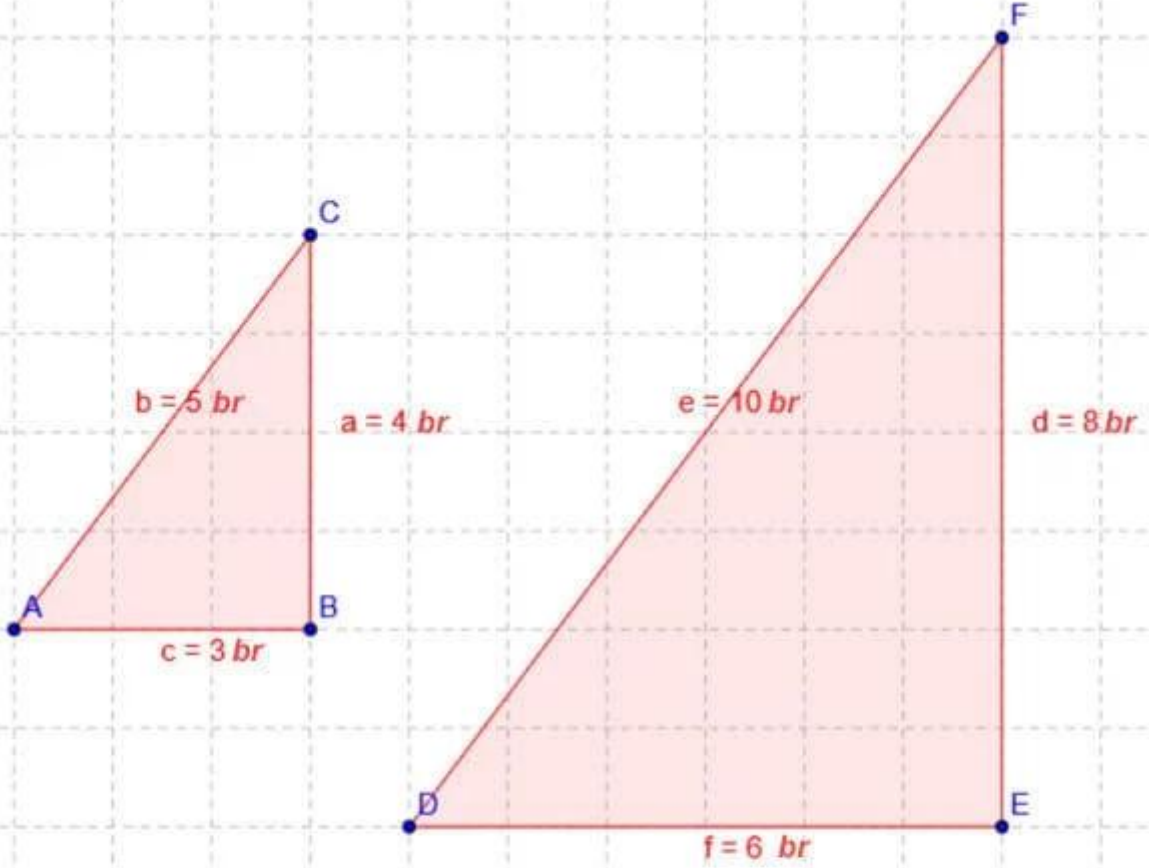
İki üçgenin benzerliği " \sim " sembolü ile gösterilir. Sembolle gösterirken eş olan açılar aynı sırada yazılmalıdır.

Benzer iki üçgende karşılıklı kenarları oranlarsak bu oranlar bir sayıya eşit olur. Bu sayıya **benzerlik oranı** denir. Genelde **k** harfi ile gösterilir.

Örneğin aşağıdaki örnekte benzerlik oranı $1/2$ 'dir. Pay ve paydaların yeri değişirse benzerlik oranı 2 olarak da yazılabilir.

Bu, "DEF üçgeninin kenar uzunlukları ABC üçgeninin 2 katıdır." veya "ABC üçgeninin kenar uzunlukları DEF üçgeninin yarısıdır." anlamına gelir.

ÜÇGENLERDE BENZERLİK



Yukarıdaki iki üçgenin karşılıklı tüm açılarının ölçüleri eşit ve eş açıların karşısındaki kenar uzunlukları orantılı olduğu için bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerlik sembolle şu şekilde gösterilir:

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$$

Bu benzer üçgenlerin karşılıklı kenar uzunluklarını oranlarsak:

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$$

olur. Buradaki "k" sayısına benzerlik oranı denir.

www.matematikciler.org

ÜÇGENLERDE BENZERLİK ŞARTLARI

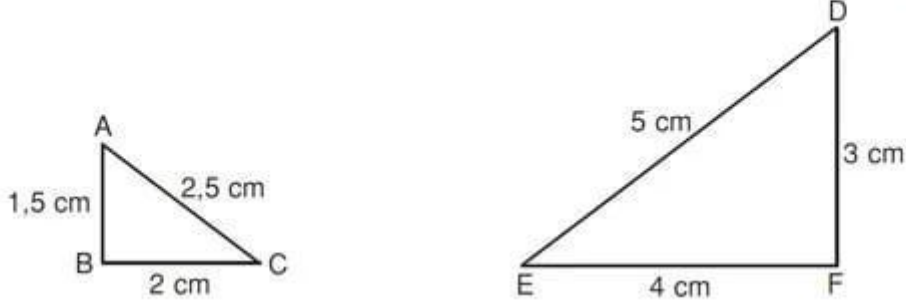
İki üçgenin tüm kenarları ve tüm açıları her zaman verilmeyebilir. Böyle durumlarda bu kısıtlı verilere bakarak da biz iki üçgenin benzer olup olmadığına kanaat getirebiliriz. Bunun için aşağıdaki benzerlik şartlarını kullanırız. Eğer iki üçgen arasında bu şartlardan biri sağlanıyorsa bu iki üçgen benzerdir diyebiliriz.

1) Kenar - Kenar - Kenar Benzerlik Şartı (KKK)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında karşılıklı **kenar uzunluklarının oranı birbirine eşit ise** bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Buna; Kenar - Kenar - Kenar (KKK) benzerlik şartı denir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Kenar-Kenar-Kenar benzerlik şartına göre benzerdir.

Kenar - Kenar - Kenar (KKK) Benzerlik Şartı



KKK kuralına göre aynı yöndeki kenar uzunluklarını birbirine oranlayalım:

$$\frac{AB}{DF} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{DE} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

Üçgenlerin kenar uzunluklarının birbirine oranı eşittir.

ABC üçgeni DEF üçgeninin $\frac{1}{2}$ oranında küçültülmüş şeklidir.

Buna göre $\widehat{ABC} \sim \widehat{DFE}$ olur.

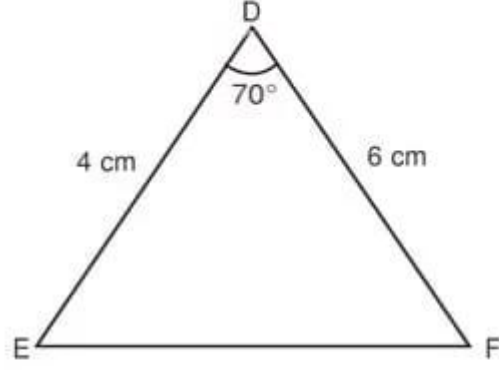
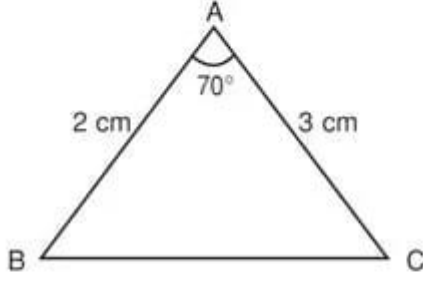
www.matematikciler.org

2) Kenar - Açı - Kenar Benzerlik Şartı (KAK)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında **karşılıklı ikişer kenar uzunluklarının oranı ve bu iki kenar arasında kalan açılarının ölçüleri birbirine eşit ise** bu üçgenler benzerdir üçgenlerdir. Buna; Kenar - Açı - Kenar (KAK) benzerlik şartı denir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Kenar-Açı-Kenar benzerlik şartına göre benzerdir.

Kenar - Açı - Kenar (KAK) Benzerlik Şartı



$$s(\widehat{A}) = s(\widehat{D}) = 70^\circ, \quad \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ 'dir.}$$

ABC ve DEF üçgenlerinin karşılıklı kenarların arasında kalan açılarının ölçüleri birbirine eşittir. Üçgenlerin açılarını oluşturan kenarları da orantılıdır.

Kenar - Açı - Kenar (KAK) kuralına göre $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dir.

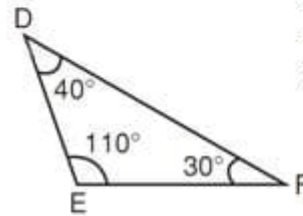
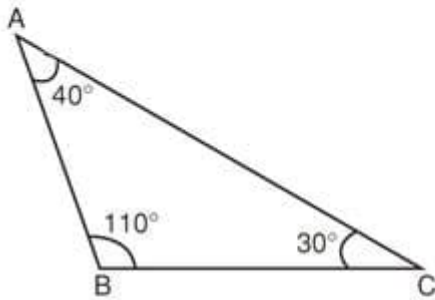
www.matematikciler.org

3) Açı - Açı Benzerlik Şartı (AA)

İki üçgen arasında birebir eşleme yapıldığında **karşılıklı iki açılarının ölçüleri birbirine eşit ise** bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Buna; Açı - Açı (AA) benzerlik şartı denir. İki açılar eş olduğu için üçüncü açılar da eştir. Bu yüzden bu şarta Açı - Açı - Açı (AAA) benzerlik şartı da denilebilir.

ÖRNEK: Aşağıdaki iki üçgen Açı-Açı benzerlik şartına göre benzerdir.

Açı - Açı (AA) Benzerlik Şartı



$$s(\widehat{A}) = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ)$$

$$s(\widehat{A}) = 40^\circ$$

$$s(\widehat{D}) = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ)$$

$$s(\widehat{D}) = 40^\circ$$

ABC ve DEF üçgenlerinin, karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olmasına rağmen eş olmadıklarını görüyoruz. İki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları farklı fakat oranları birbirine eşittir. Üçgenlerin kenar uzunluklarını ölçerek birbirine oranlarsak,

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \text{ olduğunu görürüz. Buradan AA kuralına göre ABC üçgeni ile DEF üçgeni birbiri-}$$

ne benzerdir. Bunu, $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ şeklinde sembolle yazabiliriz.

www.matematikciler.org

EŞLİK VE BENZERLİK İLE İLGİLİ

Her eş üçgen aynı zamanda benzerdir, ancak her benzer üçgen eş olmak zorunda değildir.

Eş üçgenler benzerlik oranı 1 olan benzer üçgenlerdir.

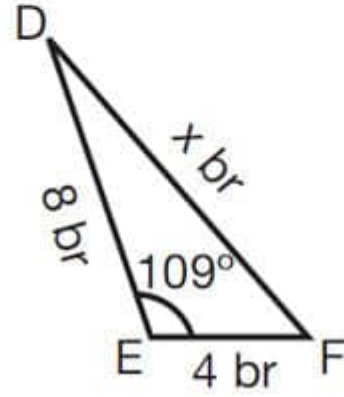
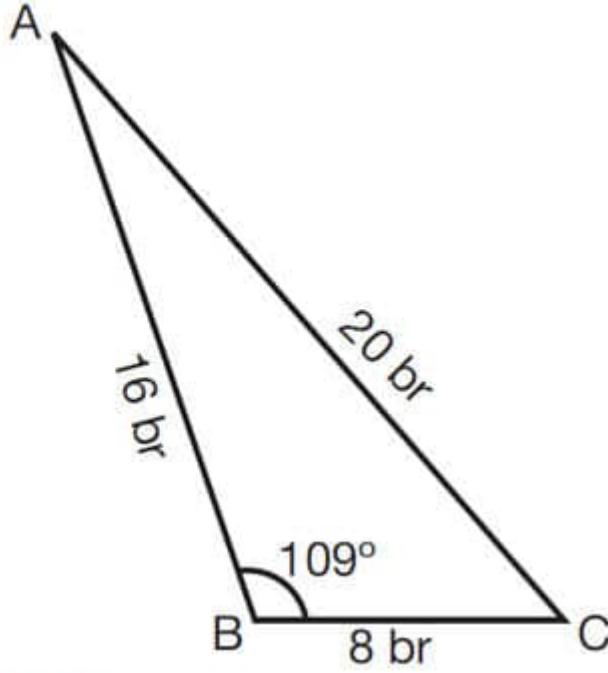
İki üçgenin benzerlik oranı k ise çevreleri oranı da k 'dır.

İki üçgenin benzerlik oranı k ise karşılıklı yükseklikleri, açıortayları, kenarortayları oranı da k 'dir.

İki üçgenin benzerlik oranı k ise alanları oranı da k^2 'dir.

ÖRNEKLER: Aşağıdaki üçgenlerde x ile gösterilen uzunlukları bulalım.

Örnek:



Çözüm:

ABC ve DEF üçgenlerinde,

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{16 \text{ br}}{8 \text{ br}} = 2$$

$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{8 \text{ br}}{4 \text{ br}} = 2 \text{ ve}$$

$s(\hat{B}) = s(\hat{E}) = 109^\circ$ olduğundan KAK benzerlik şartı sağlanır.

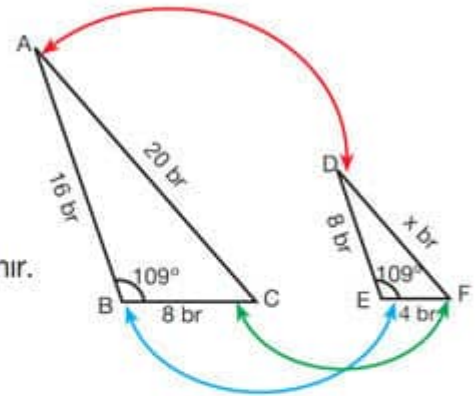
Bu durumda $\hat{ABC} \sim \hat{DEF}$ olur.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = 2$$

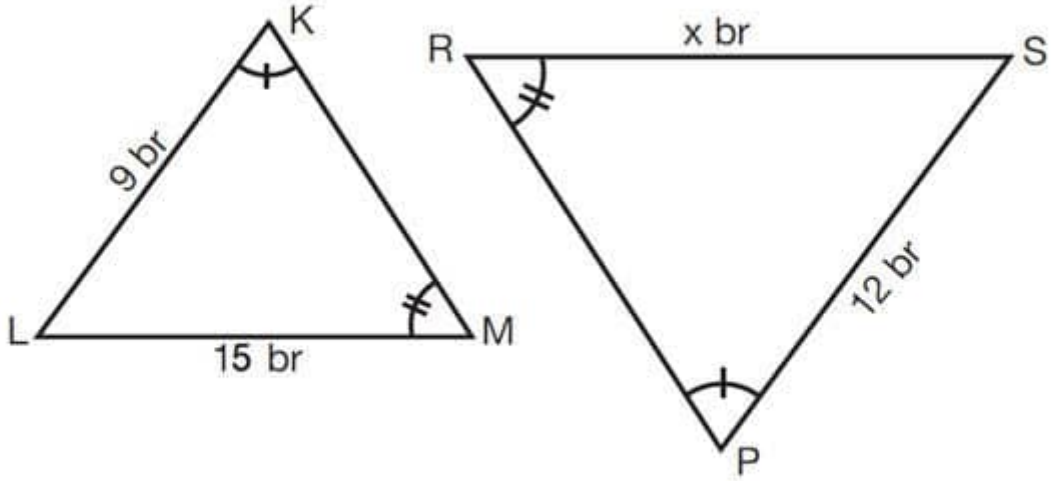
$$\frac{|AC|}{|DF|} = 2$$

$$\frac{20 \text{ br}}{x} = 2$$

$x = 10 \text{ br}$ olarak buluruz.



Örnek:



Çözüm:

KLM ve PRS üçgenlerinde,

$$s(\hat{K}) = s(\hat{P})$$

$s(\hat{M}) = s(\hat{R})$ olduğundan AA benzerlik şartı sağlanır. Bu durumda

$$\hat{KLM} \sim \hat{PSR} \text{ olur.}$$

$$\frac{IKLI}{IPSI} = \frac{ILMI}{ISRI} = \frac{IKMI}{IPRI} \text{ dir.}$$

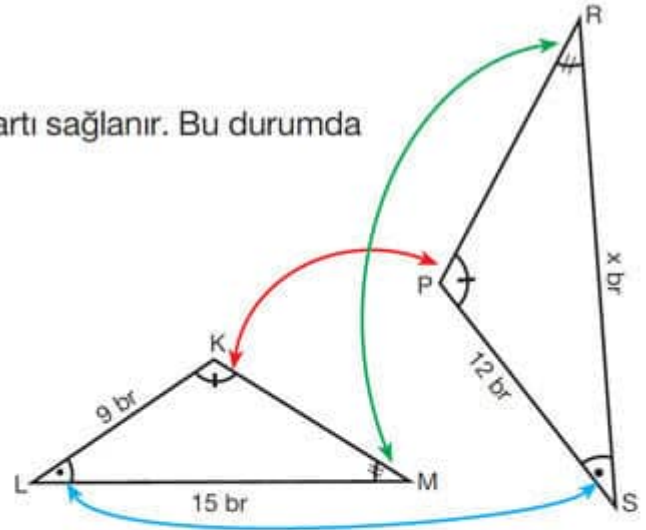
$$\frac{IKLI}{IPSI} = \frac{ILMI}{ISRI}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{15}{x}$$

$$9 \cdot x = 15 \cdot 12$$

$$x = \frac{15 \cdot 12}{9}$$

$x = 20$ br olarak buluruz.



www.matematikciler.org

❖ EŞLİK BENZERLİK İLGİLİ

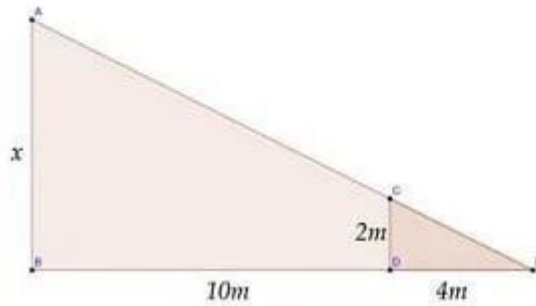
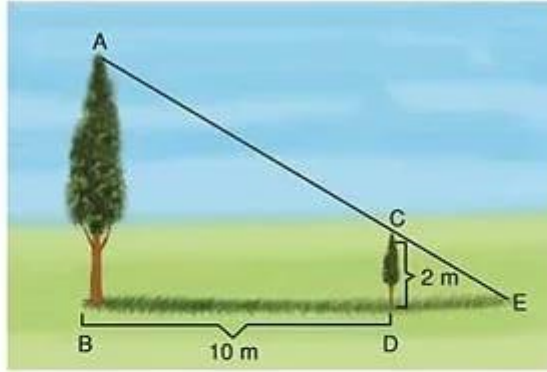
Üçgenlerde Benzerlik Problemleri

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

√ Üçgenlerde Benzerlik Problemleri nasıl çözülür?

Üçgenlerde eşlik ve benzerlik konusundan sonra öğrendiğimiz bu bilgileri problem çözmeye kullanalım. Bu konuya geçmeden önce eşlik benzerlik konusunu tekrar etmeniz fayda var: Üçgenlerde Eşlik ve Benzerlik

PROBLEM-1



www.matematikciler.org

Resimdeki büyük ve küçük ağaçların gölgelerinin bitim noktaları aynıdır. İki ağaç arasındaki uzaklık 10 m, küçük ağacın gölgesi 4 m ve küçük ağacın boyu 2 m ise büyük ağacın boyu kaç metredir?

ÇÖZÜM: Şekilde oluşan üçgenleri çizersek, bu üçgenlerin Açı Açı benzerlik şartını sağladığını

görürüz ve benzerlik oranlarını şu şekilde yazarız:

$$\frac{|ED|}{|EB|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$
$$\frac{4}{14} = \frac{2}{x}$$

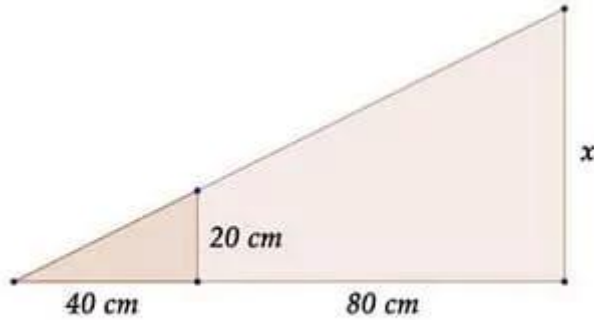
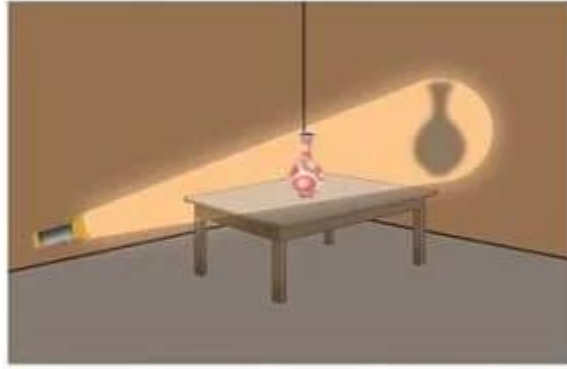
İçler-dışlar çarpımı yaparız ve x'in değerini buluruz.

$$4.x = 2.14$$

$$4x = 28$$

$$x = 7 \text{ m}$$

PROBLEM-2



www.matematikciler.org

Sehpanın üzerinde duran 20 cm boyundaki bir vazoya 40 cm uzaklıktan, karanlık bir ortamda ışık tutuluyor. 80 cm uzaklıktaki duvarda oluşan vazonun gölgesi kaç santimetre boyundadır?

ÇÖZÜM: Şekilde oluşan üçgenleri çizersek, bu üçgenlerin Açı Açı benzerlik şartını sağladığını

görürüz ve benzerlik oranlarını şu şekilde yazarız: $\frac{20}{40} = \frac{x}{120}$

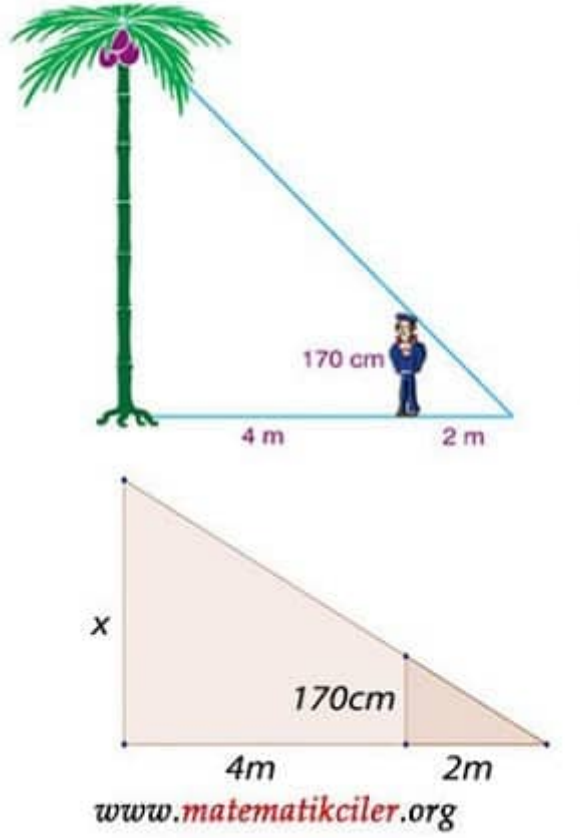
İçler-dışlar çarpımı yaparız ve x'in değerini buluruz.

$$40.x = 20.120$$

$$40x = 2400$$

$$x = 60 \text{ cm}$$

PROBLEM-3



Resimde verilen kişinin boyu 170 cm olduğuna göre ağacın boyu kaç cm'dir?

ÇÖZÜM: Şekilde oluşan üçgenleri çizersek, bu üçgenlerin Açı Açı benzerlik şartını sağladığını görürüz ve benzerlik oranlarını şu şekilde yazarız: $\frac{2}{6} = \frac{170}{x}$

İçler-dışlar çarpımı yaparız ve x'in değerini buluruz.

$$2 \cdot x = 170 \cdot 6$$

$$2x = 1020$$

$$x = 510 \text{ cm}$$

❖ EŞLİK BENZERLİK İLGİLİ

Dönüşüm Geometrisi (Yansıma – Öteleme – Dönme)

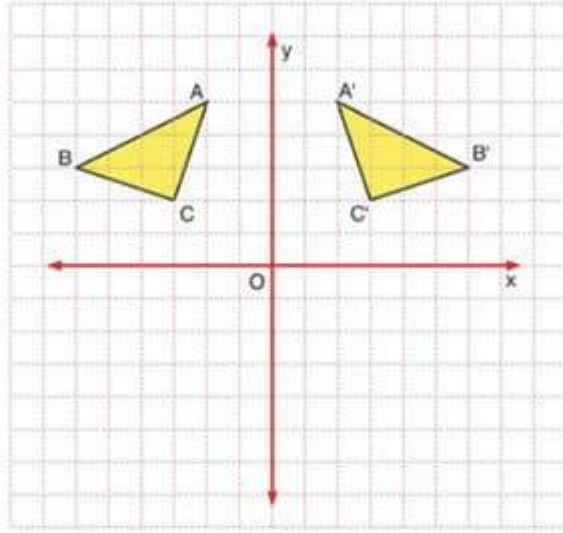
BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Koordinat Sisteminde Yansıma
- √ Koordinat Sisteminde Öteleme
- √ Koordinat Sisteminde Dönme

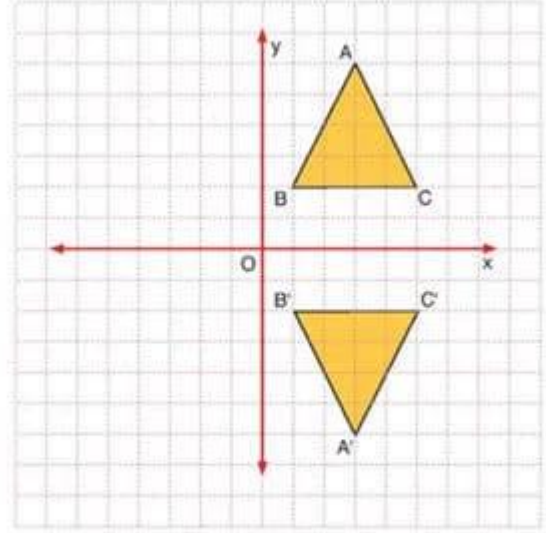
YANSIMA



KOORDİNAT SİSTEMİNDE YANSIMA (SİMETRİ)



y eksenine göre yansıma



x eksenine göre yansıma

www.matematikciler.org

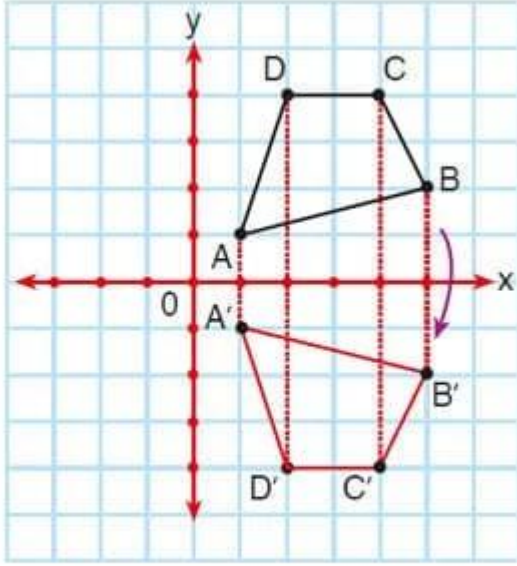
X EKSENİNE GÖRE SİMETRİ - X EKSENİNE GÖRE YANSIMA

Bir şeklin X eksenine göre yansımalarını çizmek için şeklin köşe noktalarının x eksenine dik uzaklığı bulunur, x ekseninin diğer tarafına x ekseninden bu kadar uzaklıkta noktalar belirlenir ve birleştirilir. Oluşan şeklin köşe noktalarının koordinatlarına bakılırsa şu görülecektir:

"X" eksenine göre yansıma işleminde, yansıma sonrası apsiler (x değeri) değişmez iken ordinat değeri (y değeri) işaret değiştirir.

A (X , Y) noktasının x eksenine göre yansıması olan noktanın koordinatları A' (X , - Y) olur

ÖRNEK: Aşağıda köşe noktalarının koordinatları A(1, 1), B(5, 2), C(4, 4) ve D(2, 4) olan ABCD dörtgeninin x eksenine göre yansıma altındaki görüntüsü (simetriği) verilmiştir. Dörtgenin köşelerinin koordinatlarının nasıl değiştiğini inceleyelim:



x eksenine göre yansım

$$A(1, 1) \rightarrow A'(1, -1) \quad C(4, 4) \rightarrow C'(4, -4)$$

$$B(5, 2) \rightarrow B'(5, -2) \quad D(2, 4) \rightarrow D'(2, -4)$$

Aynı kalmıştır.

$$A(1, 1) \rightarrow A'(1, -1)$$

$$D(2, 4) \rightarrow D'(2, -4)$$

İşareti değişmiştir.

www.matematikciler.org

Y EKSENİNE GÖRE SİMETRİ - Y EKSENİNE GÖRE YANSIMA

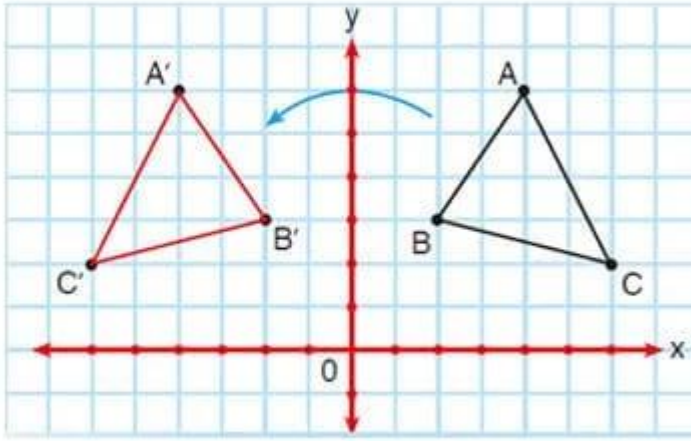
Bir şeklin Y eksenine göre yansımını çizmek için şeklin köşe noktalarının y eksenine dik uzaklığı bulunur, y ekseninin diğer tarafına y ekseninden bu kadar uzaklıkta noktalar belirlenir ve birleştirilir. Oluşan şeklin köşe noktalarının koordinatlarına bakılırsa şu görülecektir:

"Y" eksenine göre yansım işlemi, yansım sonrası ordinatlar (y değeri) değişmez iken apsis değeri (x değeri) işaret değiştirir.

A (X , Y) noktasının y eksenine göre yansım olan noktanın koordinatları A' (- X , Y) olur

ÖRNEK: Aşağıda köşe noktalarının koordinatları A(4, 6), B(2, 3)ve C(6, 2) olan ABC üçgeninin y eksenine göre yansım altındaki görüntüsü (simetriği) verilmiştir. Dörtgenin köşelerinin koordinatlarının nasıl değiştiğini inceleyelim:

y eksenine göre yansıma



İşareti değişmiştir.
A(4, 6) → A'(-4, 6)
B(2, 3) → B'(-2, 3)
C(6, 2) → C'(-6, 2)
Aynı kalmıştır.

www.matematikciler.org

ORİJİNE GÖRE YANSIMA - ORİJİNE GÖRE SİMETRİ

Bir şeklin orijine göre simetriğini almak hem x hem de y eksenine göre simetriğini almakla aynı şeydir.

A (X, Y) noktasının orijine göre yansımasının koordinatları A' (-X, -Y) olur

KOORDİNAT SİSTEMİNDE ÖTELEME

Bir şekli belirtilen doğrultuda ve birimde ötelemek için şeklin köşe noktaları o doğrultuda istenilen kadar kaydırılır ve birleştirilir.

X EKSENİNE GÖRE ÖTELEME

X eksenini boyunca öteleme yapılırken:

Sağa doğru öteleme yapılırsa öteleme miktarı noktanın apsisine (x değeri) eklenir.

A (X, Y) noktası x eksenine göre Z birim sağa ötelenirse öteleme sonrası yeni koordinatları A' (X+Z, Y) olur

Sola doğru öteleme yapılırsa öteleme miktarı noktanın apsısından (x değeri) çıkartılır.

A (X, Y) noktası x eksenine göre Z birim sola ötelenirse öteleme sonrası yeni koordinatları A' (X-Z, Y) olur

ÖRNEK: Aşağıdaki öteleme hareketini inceleyelim.

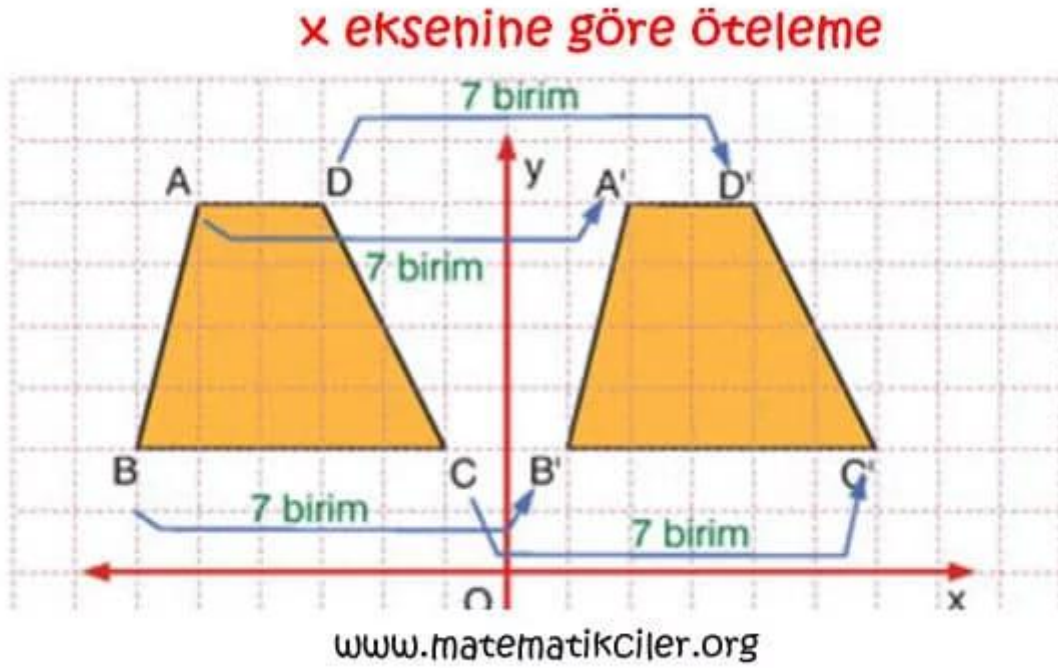
ABCD yamuğu 7 birim sağa ötelenmiştir. Bu yamuğun köşe noktalarının koordinatlarını inceleyelim:

A (-5, 6) ► 7 br sağa ► A' (2, 6)

$B(-6, 2) \rightarrow 7 \text{ br sağa} \rightarrow B'(1, 2)$

$C(-1, 2) \rightarrow 7 \text{ br sağa} \rightarrow C'(6, 2)$

$D(-3, 6) \rightarrow 7 \text{ br sağa} \rightarrow D'(4, 6)$



Y EKSENİNE GÖRE ÖTELEME

Y eksenini boyunca öteleme yapılırken:

Yukarı doğru öteleme yapılıyorsa öteleme miktarı noktanın ordinatına (y değeri) eklenir.

$A(X, Y)$ noktası y eksenine göre Z birim yukarı ötelenirse öteleme sonrası yeni koordinatları $A'(X, Y+Z)$ olur

Aşağı doğru öteleme yapılıyorsa öteleme miktarı noktanın ordinatından (y değeri) ıkartılır.

$A(X, Y)$ noktası y eksenine göre Z birim aşağı ötelenirse öteleme sonrası yeni koordinatları $A'(X, Y-Z)$ olur

ÖRNEK: Aşağıdaki teleme hareketini inceleyelim.

ABCD dikdörtgeni 5 birim aşağı ötelenmiştir. Bu dikdörtgenin köşe noktalarının koordinatlarını inceleyelim:

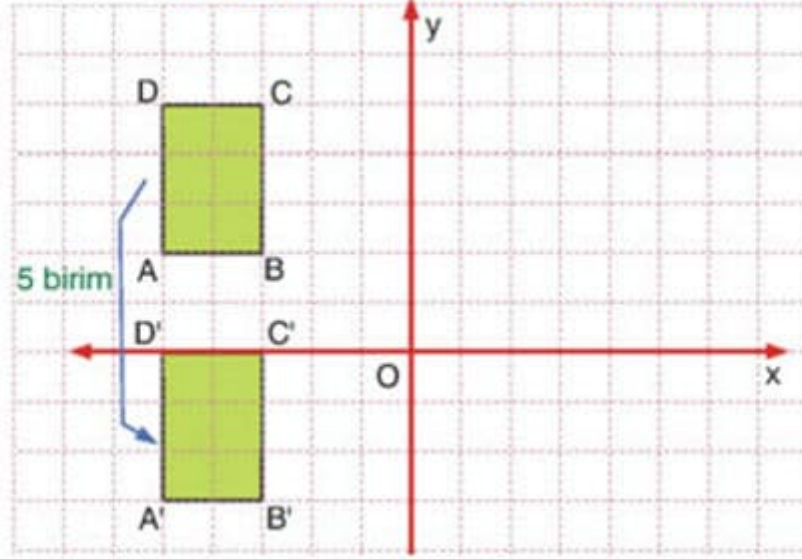
$A(-5, 2) \rightarrow 5 \text{ br ağağı} \rightarrow A'(-5, -3)$

$B(-3, 2) \rightarrow 5 \text{ br ağağı} \rightarrow B'(-3, -3)$

$C(-3, 5) \rightarrow 5 \text{ br ağağı} \rightarrow C'(-3, 0)$

$D(-5, 5) \rightarrow 5 \text{ br ağağı} \rightarrow D'(-5, 0)$

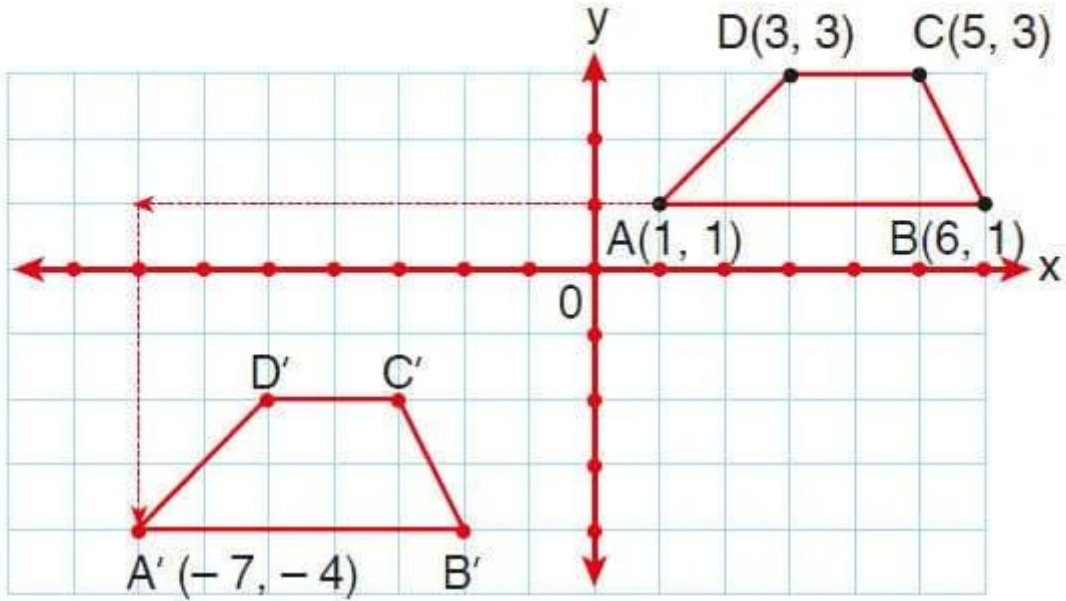
y eksenine göre öteleme



www.matematikciler.org

Öteleme ile ilgili şu soruyu inceleyelim.

ABCD yamuğunu 8 birim sola 5 birim aşağıya öteleyelim.



<u>Yamuk</u>	<u>Yamuğun ötelenmişinin koordinatları</u>
--------------	--

$$A(1, 1) \rightarrow A'(1 - 8, 1 - 5) = A'(-7, -4)$$

$$B(6, 1) \rightarrow B'(6 - 8, 1 - 5) = B'(-2, -4)$$

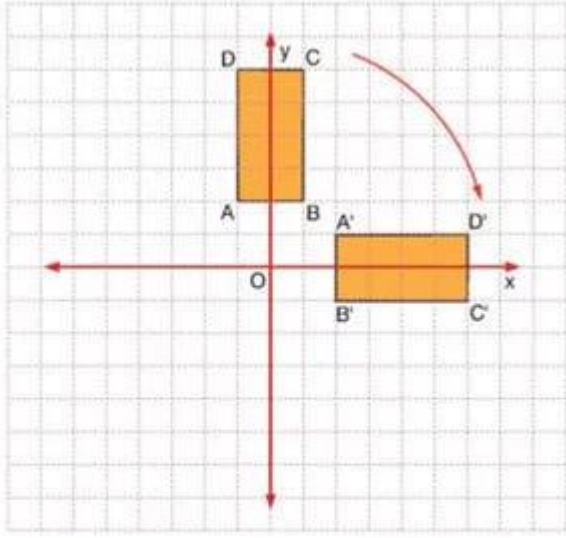
$$C(5, 3) \rightarrow C'(5 - 8, 3 - 5) = C'(-3, -2)$$

$$D(3, 3) \rightarrow D'(3 - 8, 3 - 5) = D'(-5, -2) \text{ olur.}$$

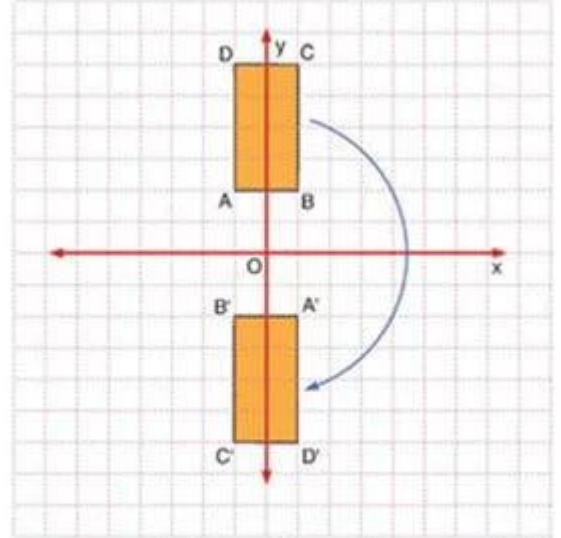
www.matematikciler.org

KOORDİNAT SİSTEMİNDE ORJİN ETRAFINDA DÖNME

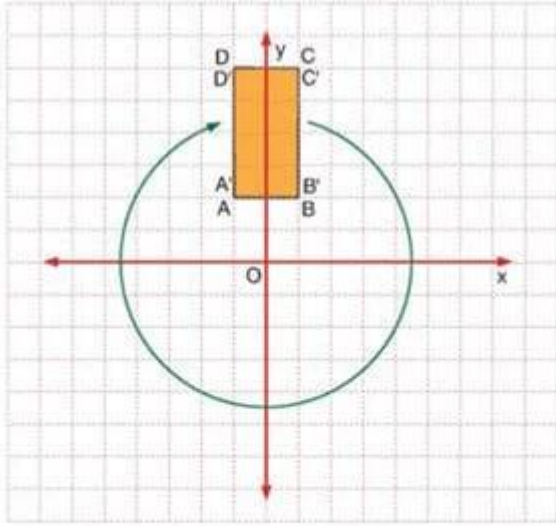
Koordinat düzleminde verilen düzlemsel bir bölge (üçgen, dörtgen gibi) orijin etrafında, saatin dönme yönünde veya saatin dönme yönünün tersi yönünde döndürülebilir. Bu konuda bir şeklin saatin dönme yönünde veya tersi yönünde 90° , 180° , 270° ve 360° döndürülmesini göreceğiz.



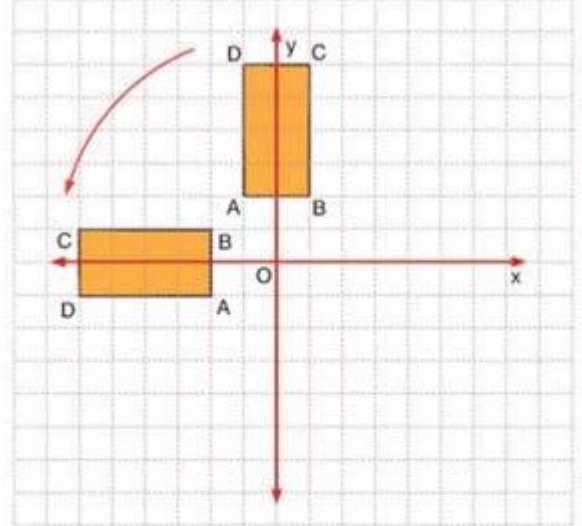
Orijin etrafında saat yönünde 90 derece dönme



Orijin etrafında saat yönünde 180 derece dönme



Orijin etrafında saat yönünde 360 derece dönme



Orijin etrafında saatin tersi yönünde 90 derece dönme

www.matematikciler.org

KURAL: Koordinat düzleminde A (x, y) noktasının orijin etrafında;

Saatın dönme yönünde 90° dönmesi sonucu koordinatları (y, -x),

Saatın dönme yönünde (veya tersi yönde) 180° dönmesi sonucu koordinatları (-x, -y),

Saatın dönme yönünde 270° dönmesi sonucu koordinatları (-y, x),

Saatın dönme yönünde (veya tersi yönde) 360° dönmesi sonucu koordinatları (x, y),

Saatın dönme yönünün tersi yönünde 90° dönmesi sonucu koordinatları (-y, x) olur.

NOTLAR:

Bunların hepsini akılda tutmak yerine 90° dönme hareketi öğrenilip diğerlerinde bu işlemi üst üste tekrarlayabilirsiniz. Mesela 270° istiyorsa üç kere 90° döndürme yapabilirsiniz.

Saatin tersi yönündeki bir dönme hareketi 360 'tan çıkartılarak saat yönünde yapılabilir. Örneğin saatin tersi yönünde 90 derece döndürme, saat yönünde $(360-90)$ 270 derece ile aynıdır.

Bir şeklin orijin etrafında 180 derece dönmesi ile orijine göre simetriği aynıdır.

Orijin etrafında dönme sonrasında elde edilen görüntü ile ilk görüntünün boyutları aynıdır.

Bir şekildeki P noktasının orjine uzaklığı ile dönme işlemi sonucunda elde edilen görüntü üzerindeki P' noktasının orjine uzaklığı aynıdır.

ÖRNEKLER

A $(-1, -5)$ noktası saat yönünde 90° döndürülürse $A'(-5, 1)$ noktası elde edilir.

B $(4, -1)$ noktası saat yönünde 180° döndürülürse $B'(-4, 1)$ noktası elde edilir.

C $(-2, 7)$ noktası saat yönünde 270° döndürülürse $C'(-7, -2)$ noktası elde edilir.

D $(3, 5)$ noktası saat yönünde 360° döndürülürse $D(3, 5)$ noktası elde edilir.

ÖRNEK: Köşelerinin koordinatları $A(7, -3)$, $B(4, 7)$ ve $C(-2, 5)$ olan ABC üçgeni saat yönünde 90° döndürülürse, yeni görüntüsünün koordinatlarını bulunuz.

A $(7, -3)$ noktası $A'(-3, -7)$

B $(4, 7)$ noktası $B'(7, -4)$

C $(-2, 5)$ noktası $C'(5, 2)$ olacaktır.

📌 DÖNÜŞÜM GEOMETRİSİ İLE İLGİLİ

Ötelemeli Yansıma ve Yansımali Öteleme

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

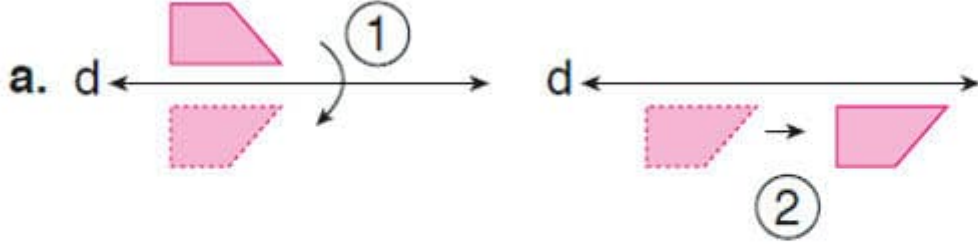
- √ Ötelemeli Yansıma Nedir?
- √ Yansımali Öteleme Nedir?

Bu konudan önce dönüşüm geometrisi konu anlatımına bakmanızı tavsiye ederiz: Yansıma, Öteleme, Dönme Konu Anlatımı

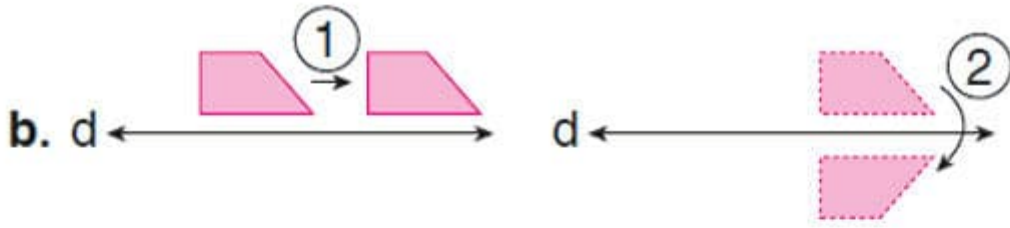
ÖTELEMELİ YANSIMA ve YANSIMALI ÖTELEME

- Bir şeklin, bir doğru boyunca yansımasından sonra ötelenmişi ile ötelenmişinden sonra yansıması altındaki görüntüleri aynıdır.
- Ötelemeli yansıma da hiç bir nokta ve yansıma doğrusundan başka hiç bir doğru sabit kalmaz.

Aşağıdaki dönüşüm hareketlerini inceleyelim:



Dikdörtgensel bölge, önce d doğrusuna göre yansıtılmış, sonra da d doğrusu boyunca ötelenmiştir.



Dikdörtgensel bölge, önce d doğrusu boyunca ötelenmiş, sonra da d doğrusuna göre yansıtılmıştır.

Her iki hareketin sonunda elde edilen görüntüler aynıdır.

Prizmaların Temel Elemanları ve Açınımı

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

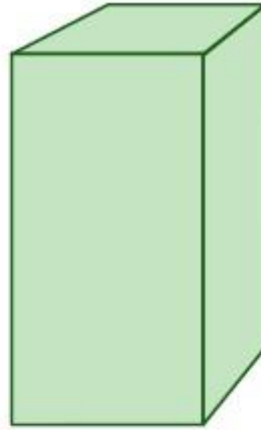
- √ Dik prizmalar
- √ Dik prizmaların temel elemanları
- √ Dik prizmaların açınımı

DİK PRİZMALAR

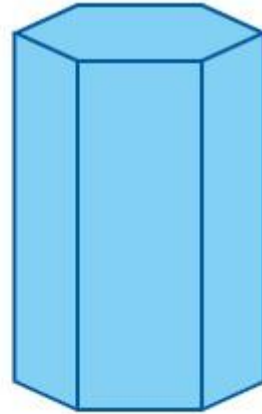
Alt ve üst tabanı birbirine eş ve paralel çokgensel bölge olan, yan yüzleri ise tabanlara dik dörtgensel bölge olan geometrik cisimlere **dik prizma** adı verilir.



Üçgen
Dik Prizma



Kare
Dik Prizma



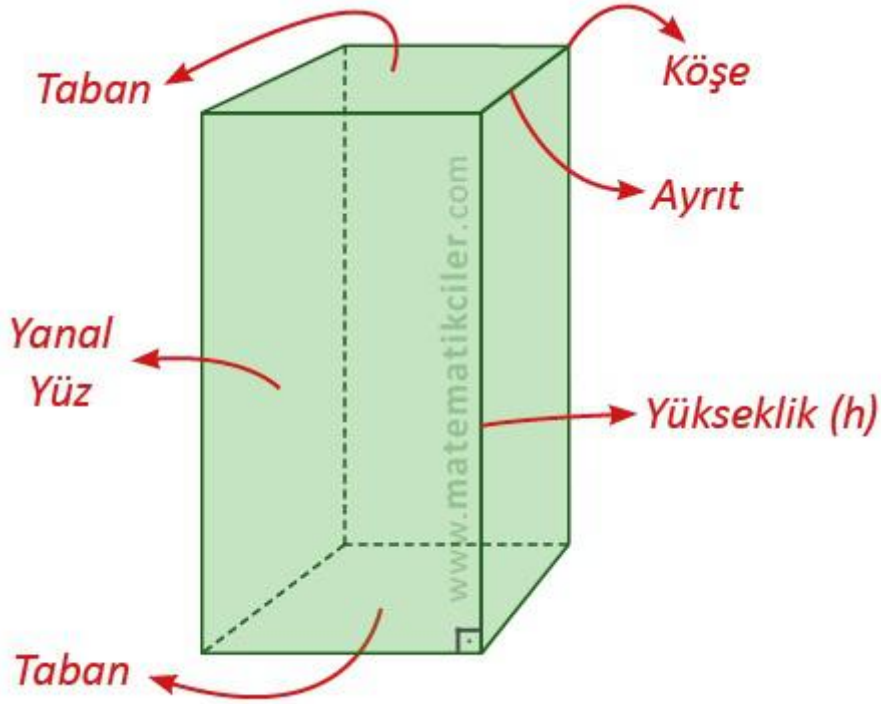
Altıgen
Dik Prizma

Prizmalar tabanlarına göre isimlendirilir. Tabanları üçgen olan prizmaya üçgen prizma, tabanları dikdörtgen olan prizmaya dikdörtgenler prizması, tabanları altıgen olan prizmaya altıgen prizma adı verilir.

PRİZMANIN TEMEL ELEMANLARI

Prizmanın temel elemanları; taban, yanal yüz, ayrit, köşe ve yüksekliktir.

- Dik prizmaların **taban**ları birbirine eş ve paraleldir.
- Dik prizmaların **yanal yüz**leri dikdörtgenlerden oluşur.
- Yüzeylerin kesiştikleri doğru parçaları prizmanın **ayrit**larıdır.
- Ayritların kesiştikleri noktalar prizmanın **köş**eleridir.
- Üst tabanın bir noktasından alt tabana indirilen dikmeye **yükseklik** denir ve "h" ile gösterilir.
- Dik prizmalarda yan ayritlar aynı zamanda yüksekliktir.



Prizma	Taban Sayısı	Yanal Yüz Sayısı	Yüz Sayısı	Köşe Sayısı	Ayrit Sayısı
Üçgen Dik Prizma	2	3	5	6	9
Dörtgen Dik Prizma	2	4	6	8	12
Beşgen Dik Prizma	2	5	7	10	15
Altıgen Dik Prizma	2	6	8	12	18
"n"gen Dik Prizma	2	n	n + 2	2.n	3.n

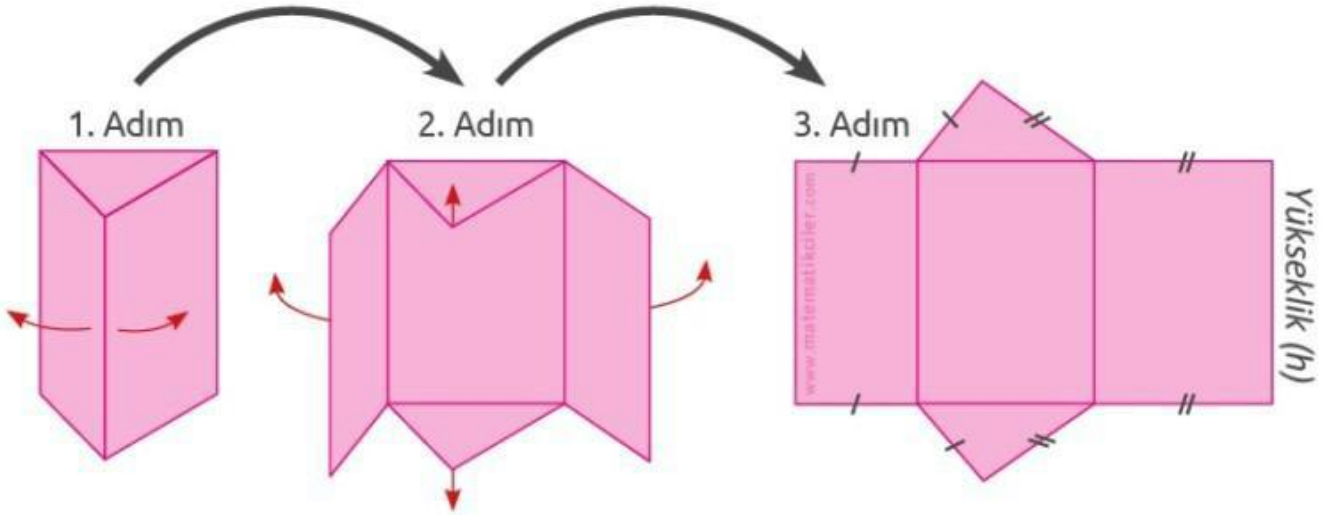
DİK PRİZMANIN AÇINIMI

Dik prizmaların açınımında; tabanları oluşturan **2 adet eş çokgen**, yanal yüzleri oluşturan **2 adet dikdörtgen** ve tabanın kenar sayısı kadar **dikdörtgen** yer alır.



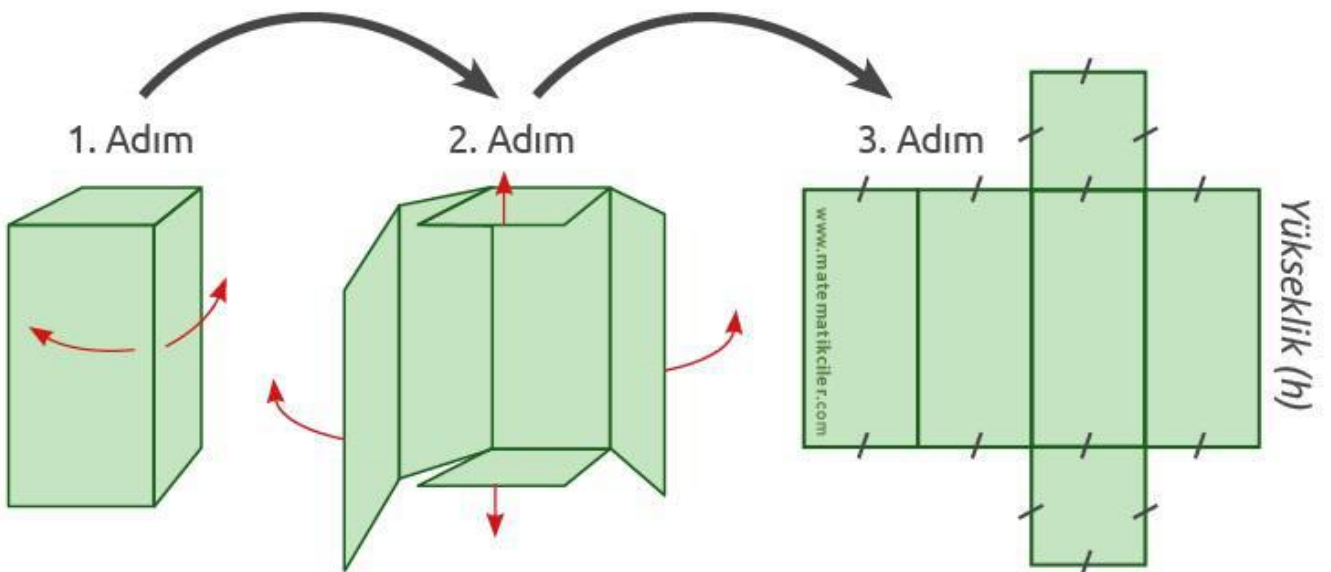
Üçgen Dik Prizmanın Açınımı

Üçgen dik prizmanın açınımında 2 adet eş üçgen ve 3 adet dikdörtgen bulunur. Yanal yüzleri oluşturan dikdörtgenlerin birer kenarının uzunluğu prizmanın yüksekliğine eşittir. Bu dikdörtgenlerin diğer kenarlarının her birinin uzunluğu ise üçgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.



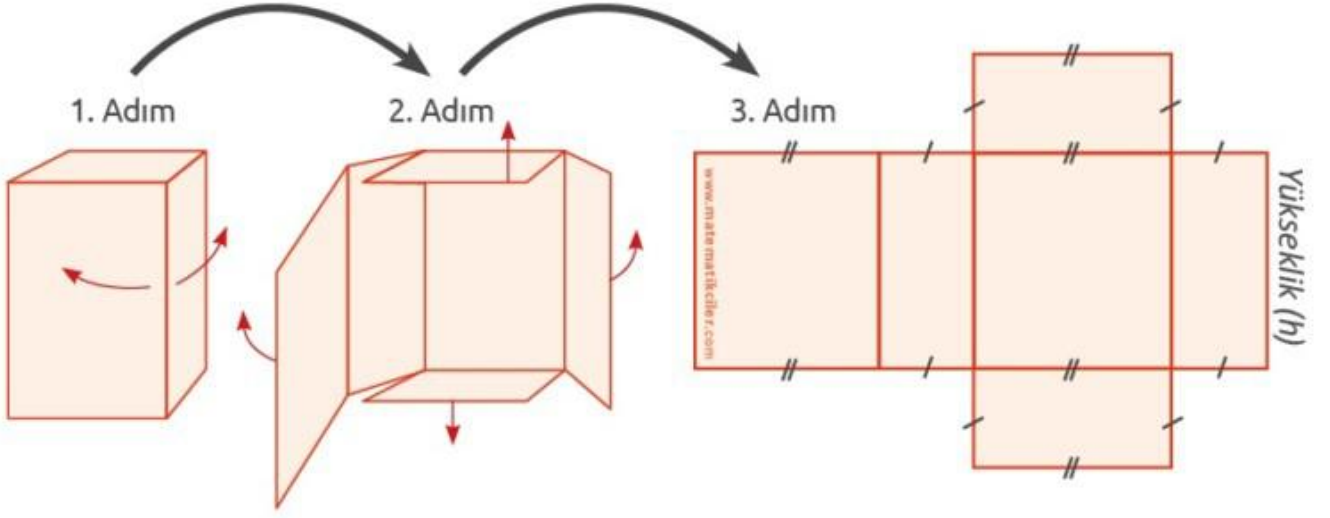
Kare Dik Prizmanın Açınımı

Kare dik prizmanın açınımında 2 adet eş kare ve 4 adet eş dikdörtgen bulunur. Yanal yüzleri oluşturan eş dikdörtgenlerin bir kenar uzunluğu prizmanın yüksekliğine, diğer kenar uzunluğu karenin kenar uzunluğuna eşittir.



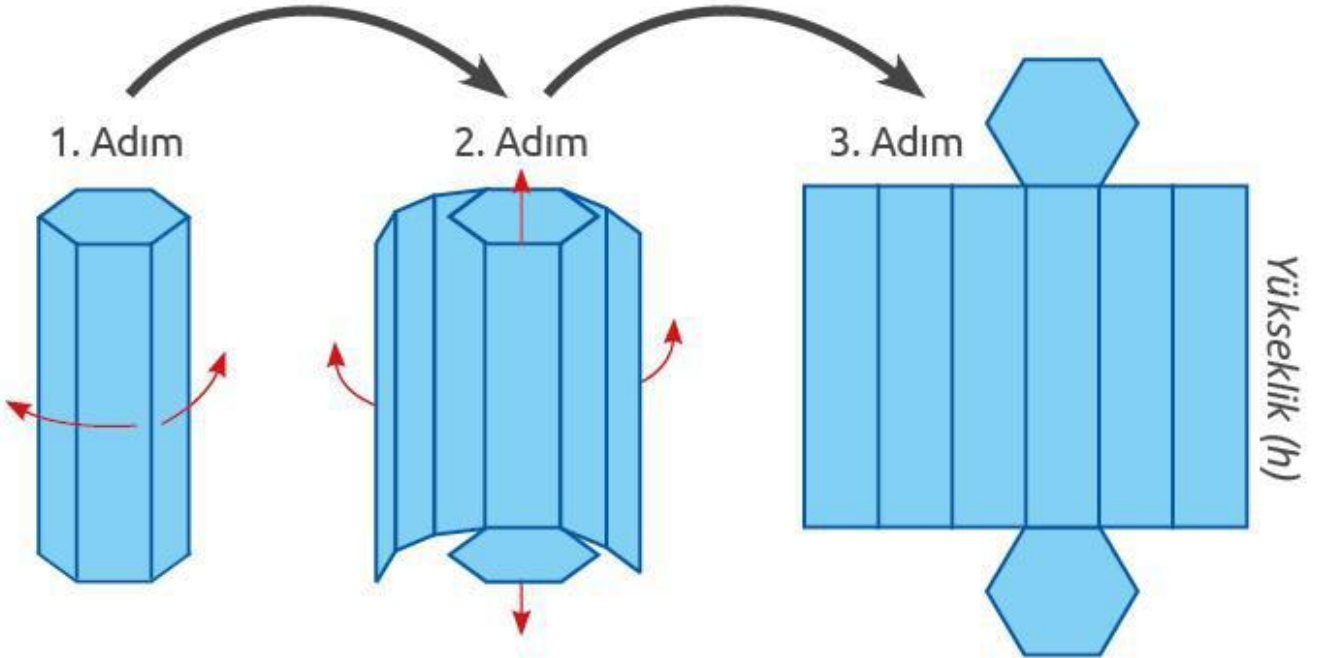
Dikdörtgen Dik Prizmanın Açınımı

Dikdörtgen dik prizmanın açınımında 6 adet dikdörtgen bulunur. Kapalı halde karşılıklı yüzlerde bulunan dikdörtgenler açınımda da birbirine eştir. Yanal yüzleri oluşturan dikdörtgenlerin bir kenar uzunluğu prizmanın yüksekliğine eşittir. Bu dikdörtgenlerin diğer kenarlarının her birinin uzunluğu ise tabanın bir kenar uzunluğuna eşittir.



Altıgen Dik Prizmanın Açınımı

Altıgen dik prizmanın açınımında 2 adet eş altıgen ve 6 adet dikdörtgen bulunur. Tabanlardaki altıgenler düzgün altıgen ise yanal yüzleri oluşturan dikdörtgenler birbirine eş olur. Dikdörtgenlerin bir kenar uzunluğu prizmanın yüksekliğine eşittir. Bu dikdörtgenlerin diğer kenarlarının her birinin uzunluğu ise tabanın bir kenar uzunluğuna eşittir.



KONUYU PEKİŞTİRMEK İÇİN:

+	KONU KAZANIMLARI
---	------------------

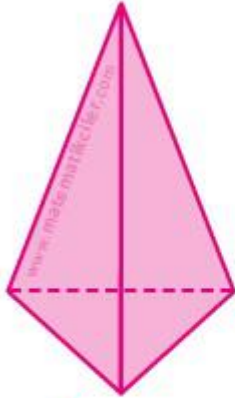
Piramidin Temel Elemanları ve Açınımı

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

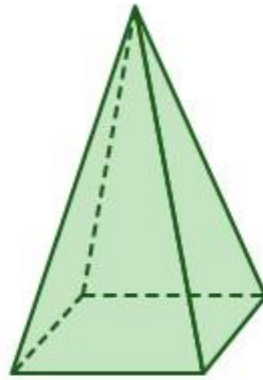
- √ Dik piramit
- √ Dik piramidin temel elemanları
- √ Dik piramidin açınımı

DİK PİRAMİT

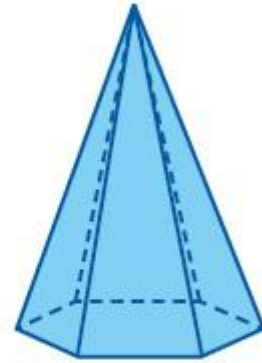
Bir çokgensel bölgenin tüm noktalarının bulunduğu yüzey dışındaki bir nokta ile birleşimine **piramit** denir. Yüksekliği tabanın merkezinden geçen piramide ise **dik piramit** denir.



Üçgen
Dik Piramit



Kare
Dik Piramit



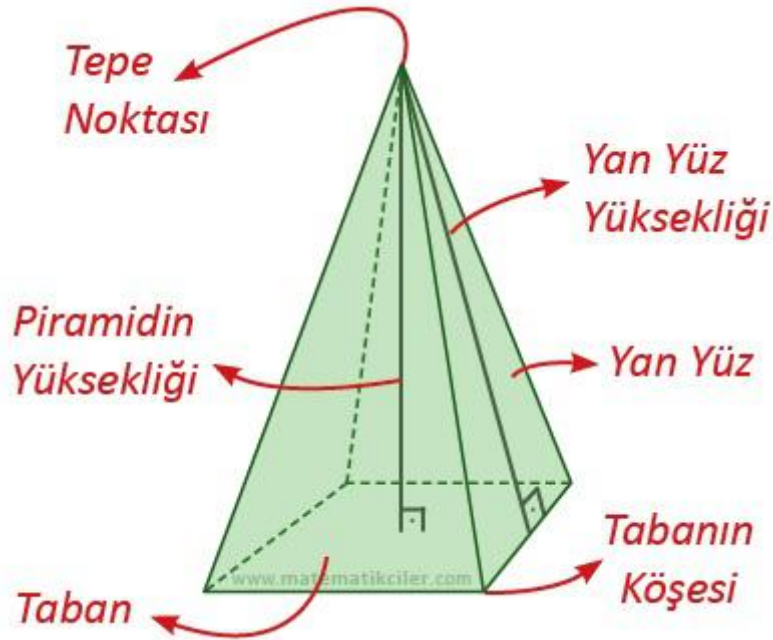
Altıgen
Dik Piramit

Piramitler tabanlarına göre isimlendirilir. Tabanı üçgen olan piramide üçgen piramit, tabanı dikdörtgen olan piramide dikdörtgen piramit, tabanı altıgen olan piramide altıgen piramit adı verilir.

PİRAMİDİN TEMEL ELEMANLARI

Piramidin temel elemanları; taban, yanal yüz, ayırıt, tepe noktası ve yüksekliktir.

- Dik piramitlerin **tabanı** piramide ismini veren çokgensel bölgedir.
- Dik piramitlerin **yanal yüzleri** ikizkenar üçgenlerden oluşur.
- Yüzeylerin kesiştikleri doğru parçaları piramidin **ayırıt**larıdır.
- Yanal ayırıtların kesiştikleri nokta **tepe noktası**dır.
- Ayırıtların kesiştikleri noktalar piramidin **köşeleri**dir.
- Tepe noktasından tabana indirilen dikmeye **piramidin yüksekliği** denir ve "h" ile gösterilir.
- Dik piramidlerde piramidin yüksekliği taban merkezine iner.
- Tepe noktasından tabana kenarlarına çizilen dikmelere **yan yüz yüksekliği** denir.
- Bir dik piramitte farklı yüzlerdeki yan yüz yüksekliklerinin uzunlukları birbirinden farklı olabilir.



Piramit	Taban	Yanal Yüz Sayısı	Yüz Sayısı	Köşe Sayısı	Ayrıt Sayısı
Üçgen Dik Piramit	1	3	4	4	6
Dörtgen Dik Piramit	1	4	5	5	8
Beşgen Dik Piramit	1	5	6	6	10
Altıgen Dik Piramit	1	6	7	7	12
"n"gen Dik Piramit	1	n	n + 1	n + 1	2.n

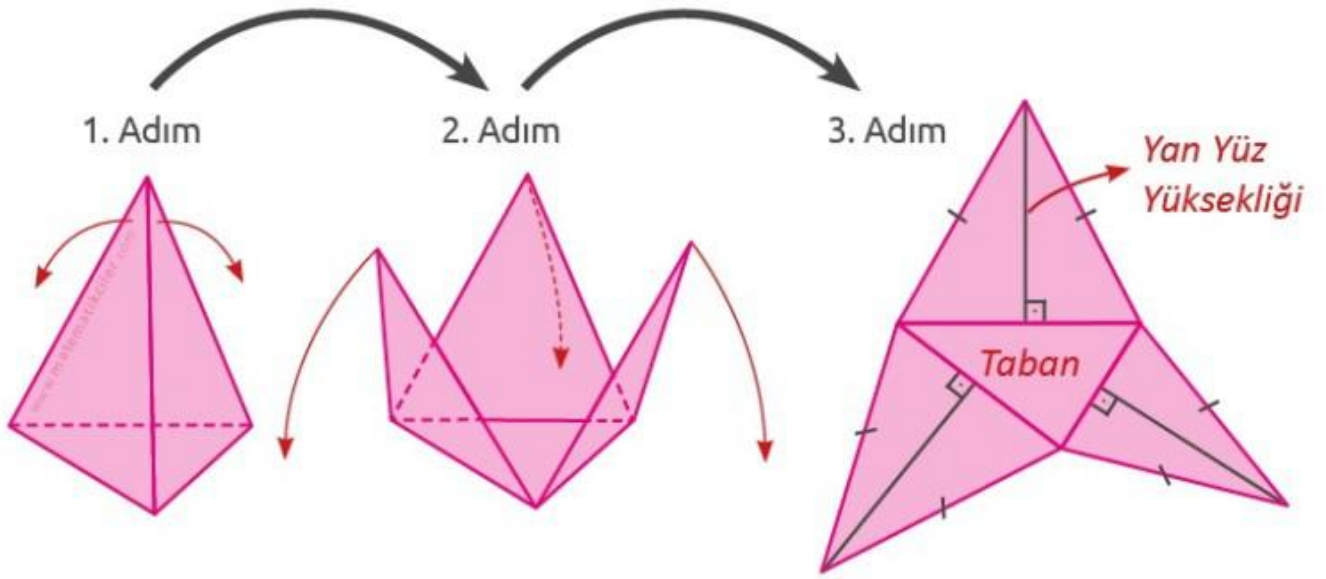
DİK PİRAMİDİN AÇINIMI

Dik piramidin açınımında; tabanı oluşturan **çokgen**, yanal yüzleri oluşturan ve tabanın kenar sayısı kadar **ikizkenar üçgen** yer alır.

Yan yüz yükseklikleri dik piramidin açınımında gösterilebilir. Ancak piramidin yüksekliği açınımında yer almaz.

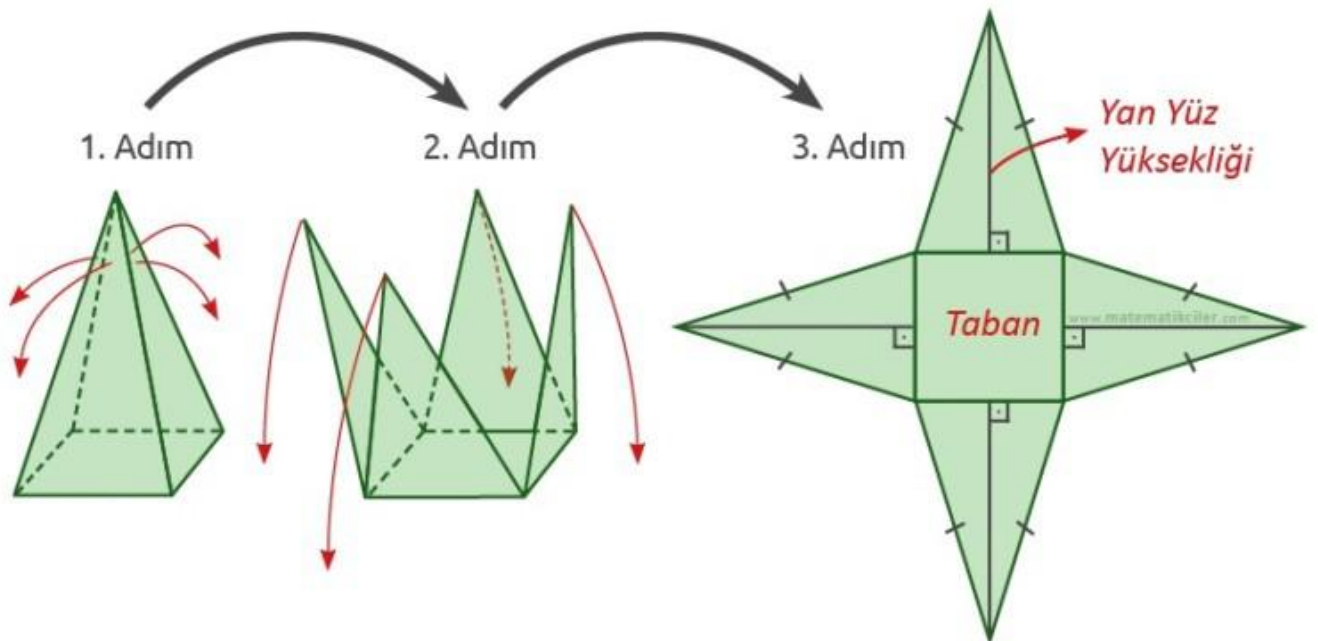
Üçgen Dik Piramidin Açınımı

Üçgen dik piramidin açınımında taban üçgeni ve yanal yüzleri oluşturan 3 adet ikizkenar üçgen bulunur.



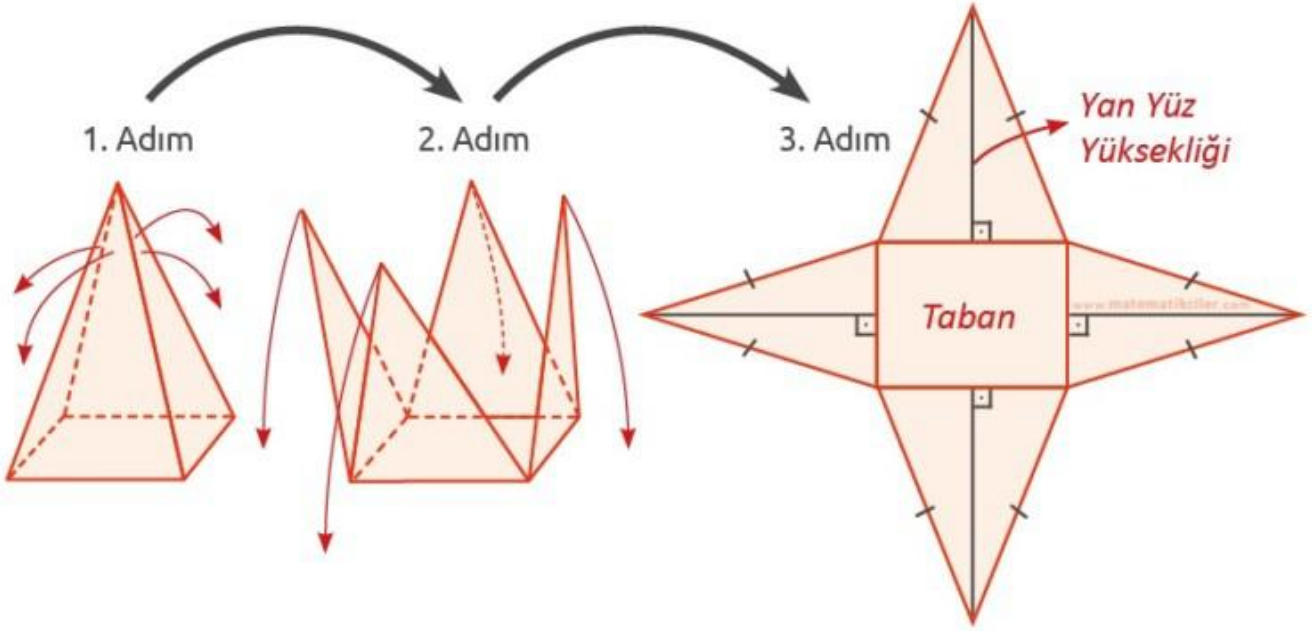
Kare Dik Piramidin Açınımı

Kare dik piramidin açınımında bir kare ve yanal yüzleri oluşturan 4 adet eş ikizkenar üçgen bulunur.



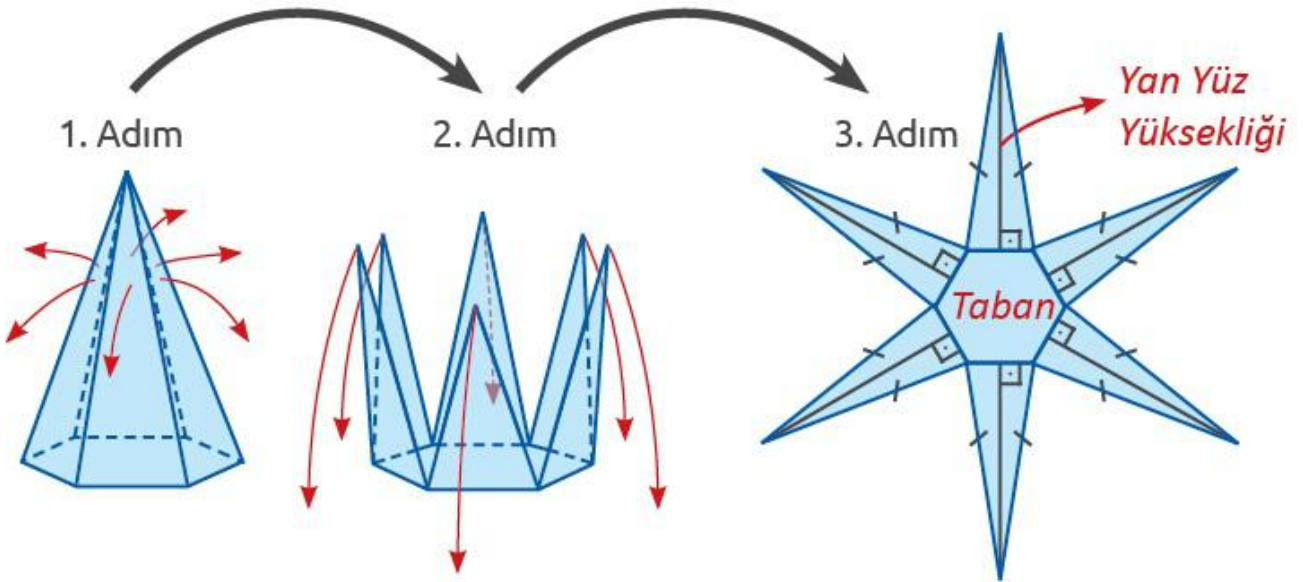
Dikdörtgen Dik Piramidin Açınımı

Dikdörtgen dik piramidin açınımında bir dikdörtgen ve yan yüzleri oluşturan 4 adet ikizkenar üçgen bulunur. Bu üçgenler karşılıklı olarak birbirine eştir.



Altıgen Dik Piramidin Açınımı

Altıgen dik piramidin açınımında bir adet altıgen ve yan yüzleri oluşturan 6 adet ikizkenar üçgen bulunur. Tabandaki altıgen düzgün altıgen ise yan yüzleri oluşturan üçgenler birbirine eş olur.



Koninin Temel Elemanları ve Açınımı

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Dik dairesel koni
- √ Koninin temel elemanları
- √ Koninin açınımı

DİK DAİRESEL KONİ

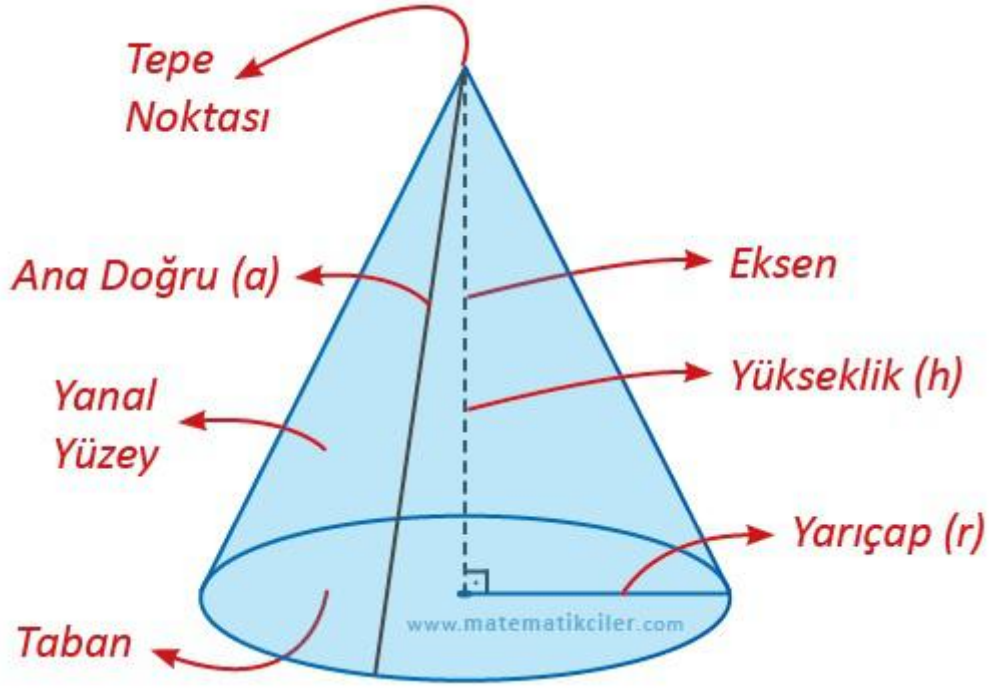
Bir dairenin bütün noktalarının daire düzlemi dışındaki bir nokta ile birleşimine **koni** denir. Yüksekliği tabanın merkezinden geçen koniye ise **dik koni** denir.



KONİNİN TEMEL ELEMANLARI

Koninin temel elemanları; taban, yanal yüzey, tepe noktası, ana doğrular, eksen, yarıçap ve yüksekliktir.

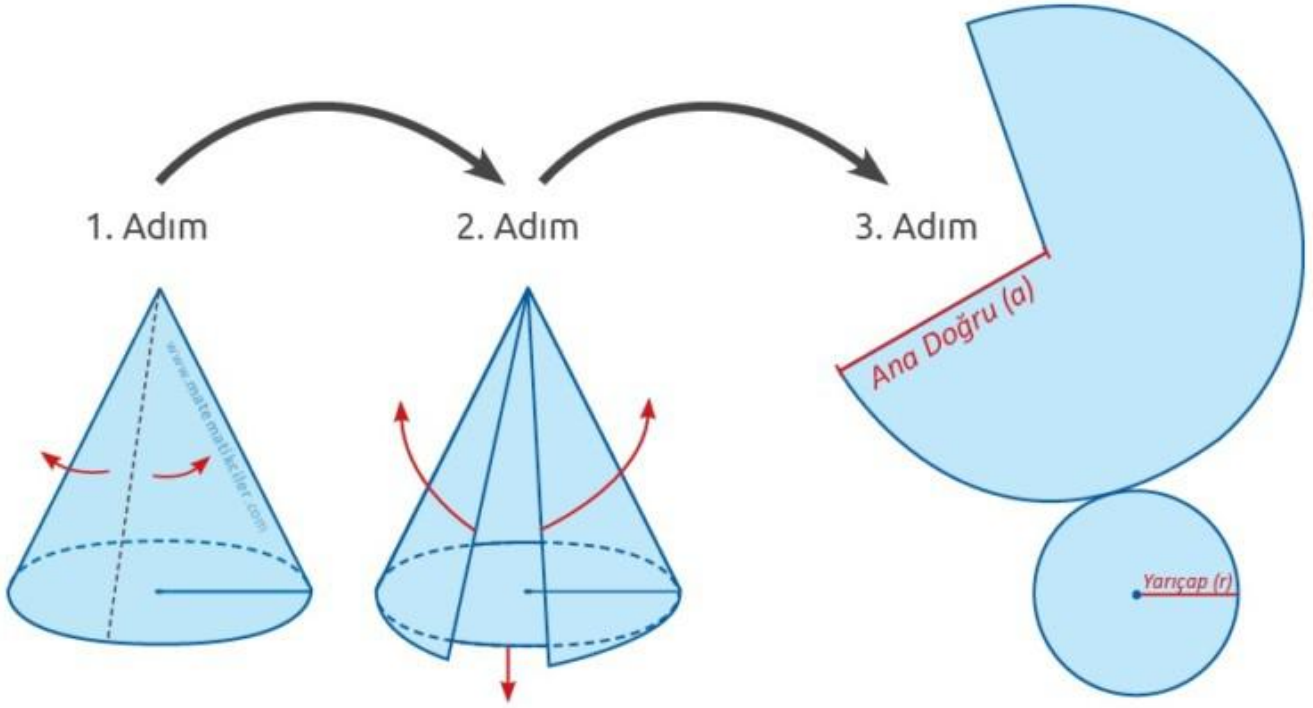
- Konide yer alan daireye **taban** denir.
- Tabanın yarıçapı **koninin yarıçapı**dır ve "**r**" ile gösterilir.
- Koniyi oluşturmak için taban dışında alınan noktaya **tepe noktası** denir.
- Tepe noktası ile taban merkezini birleştiren doğru parçasına **eksen** denir.
- Tepe noktasından tabana indirilen dikmeye **yükseklik** denir ve "**h**" ile gösterilir.
- Dik dairesel koninin ekseni tabana dik olduğu için eksen aynı zamanda yüksekliktir.
- Tepe noktası ile taban dairesinin çevresi üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçalarına **ana doğru** denir ve "**a**" ile gösterilir.



Koninin köşesi ve ayrıtı yoktur. Tabanı ve bir yanal yüzeyi vardır.

DİK KONİNİN AÇINIMI

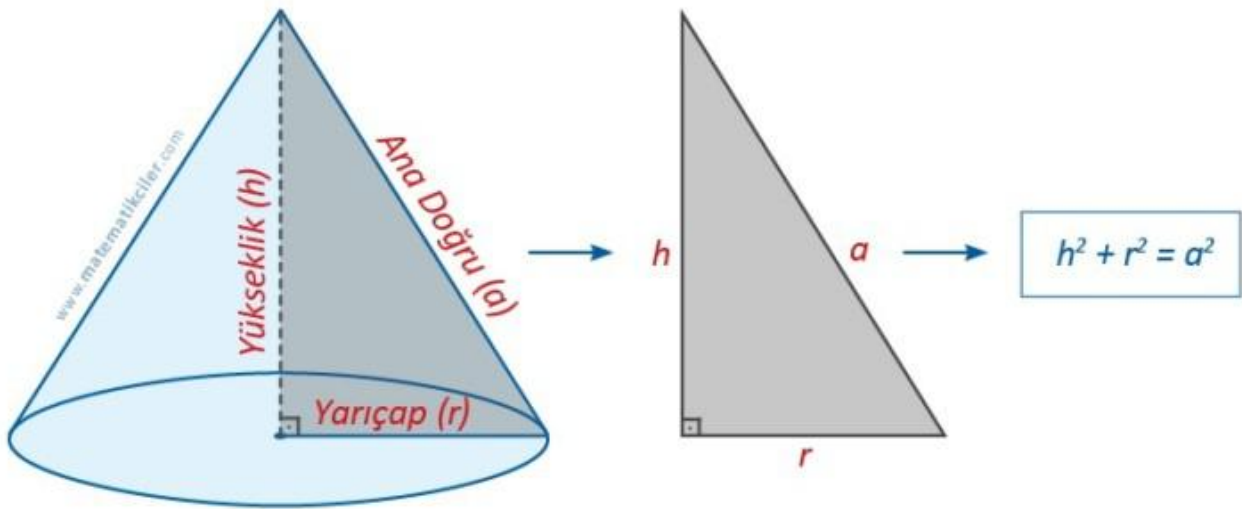
Dik dairesel koninin açınımında; tabanı oluşturan **daire**, yanal yüzleri oluşturan **daire dilimi** yer alır.



Dik dairesel konide yarıçap, yükseklik ve ana doğru **dik üçgen** oluşturur. **Pisagor bağıntısından** yararlanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

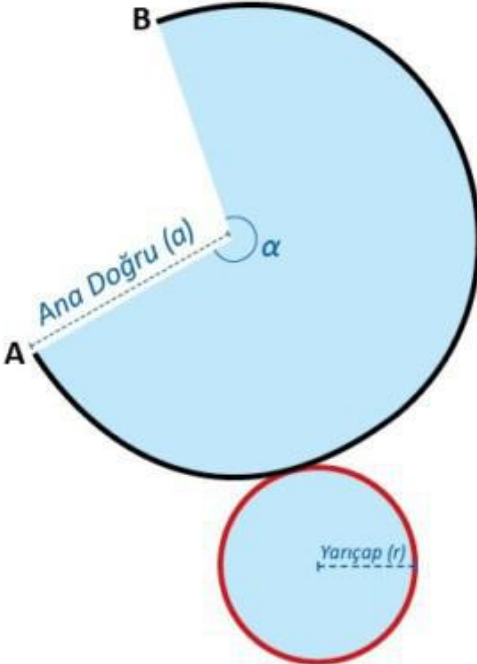
$$h^2 + r^2 = a^2$$

Dik dairesel konide yarıçap, yükseklik ve ana doğru dik üçgen oluşturur. Pisagor bağıntısından yararlanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.



Konide tabanı oluşturan **dairenin çevre uzunluğu**, yanal yüzeyi oluşturan **daire diliminin yayının uzunluğuna eşittir**. Bu eşitlikten aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{\text{Tabandaki Dairenin Yarıçapı (r)}}{\text{Daire Diliminin Yarıçapı (a)}} = \frac{\text{Daire Diliminin Merkez Açısı (\alpha)}}{360}$$



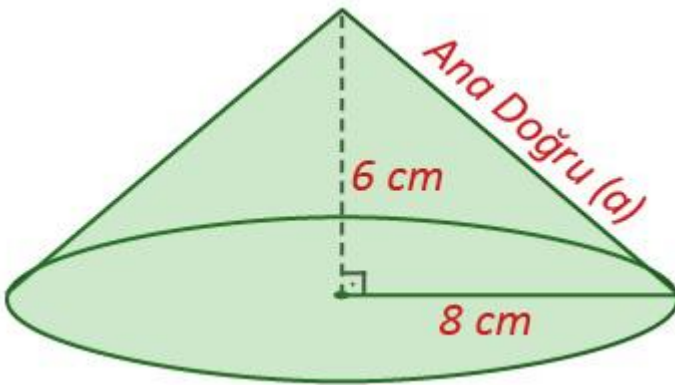
Tabanı oluşturan dairenin çevre uzunluğu, yanal yüzeyi oluşturan daire diliminin yayının uzunluğuna eşittir.

(Yay uzunluğu) $\frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \alpha}{360} = 2 \cdot \pi \cdot r$ (Dairenin çevresi)

$$\frac{a \cdot \alpha}{360} = r$$
$$\frac{\alpha}{360} = \frac{r}{a}$$

www.matematikciler.com

ÖRNEK: Taban yarıçapının uzunluğu 8 cm, yüksekliği 6 cm olan dik dairesel koninin açılımını çizelim.



Önce ana doğrunun uzunluğunu hesaplayalım.

$$h^2 + r^2 = a^2$$

$$6^2 + 8^2 = a^2$$

$$100 = a^2$$

a = 10 buluruz.

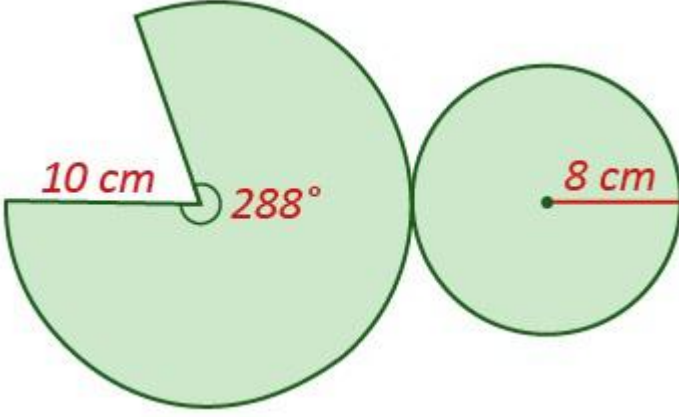
Şimdi açınımdaki daire diliminin merkez açısını hesaplayalım.

$$\frac{r}{a} = \frac{\alpha}{360}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{\alpha}{360}$$

$$10\alpha = 2880$$

$\alpha = 288$ buluruz ve bu ölçülere uygun çizim yaparız.



--	--

Silindirin Temel Elemanları ve Açınımı

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Dik dairesel silindir
- √ Silindirin temel elemanları
- √ Silindirin açınımı

DİK DAİRESEL SİLİNDİR

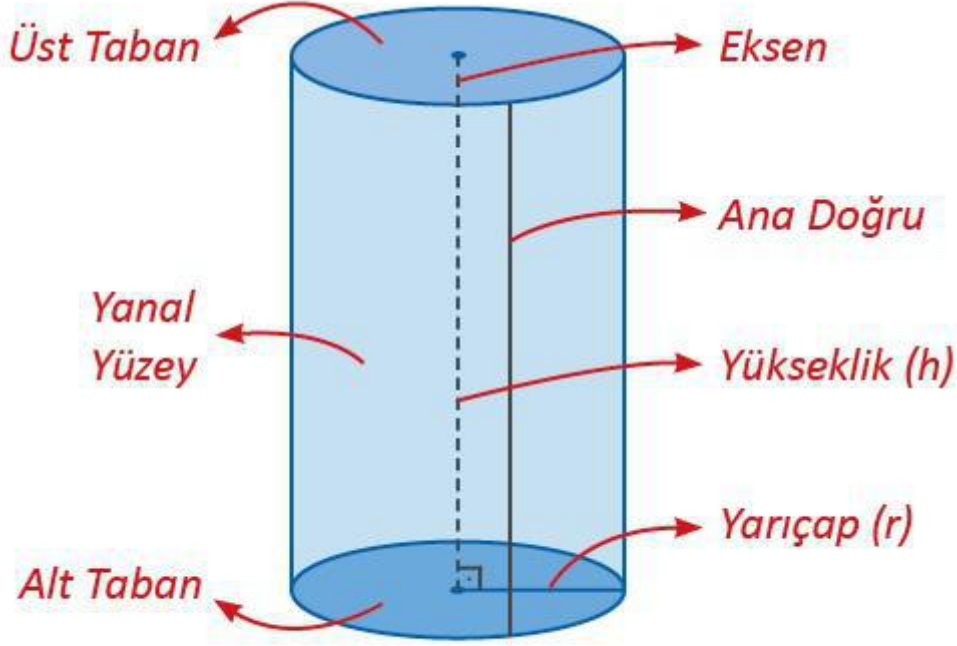
Tabanları birbirine paralel eş dairelerden oluşan cisme **silindir** denir. Ekseni tabana dik olan silindire ise **dik dairesel silindir** denir.



SİLİNDİRİN TEMEL ELEMANLARI

Silindirin temel elemanları; tabanlar, yanal yüzey, ana doğrular, eksen, yarıçap ve yüksekliktir.

- Silindirde karşılıklı yer alan eş dairelere **taban** denir.
- Tabanların yarıçapları **silindirin yarıçapıdır** ve "r" ile gösterilir.
- Taban merkezlerini birleştiren doğru parçasına **eksen** denir.
- Üst tabanın bir noktasından alt tabana indirilen dikmeye **yükseklik** denir ve "h" ile gösterilir.
- Dik dairesel silindirin eksenine tabana dik olduğu için eksen aynı zamanda yüksekliktir.
- Tabanların karşılıklı iki noktasını birleştiren ve eksene paralel olan doğru parçalarına **ana doğru** denir.

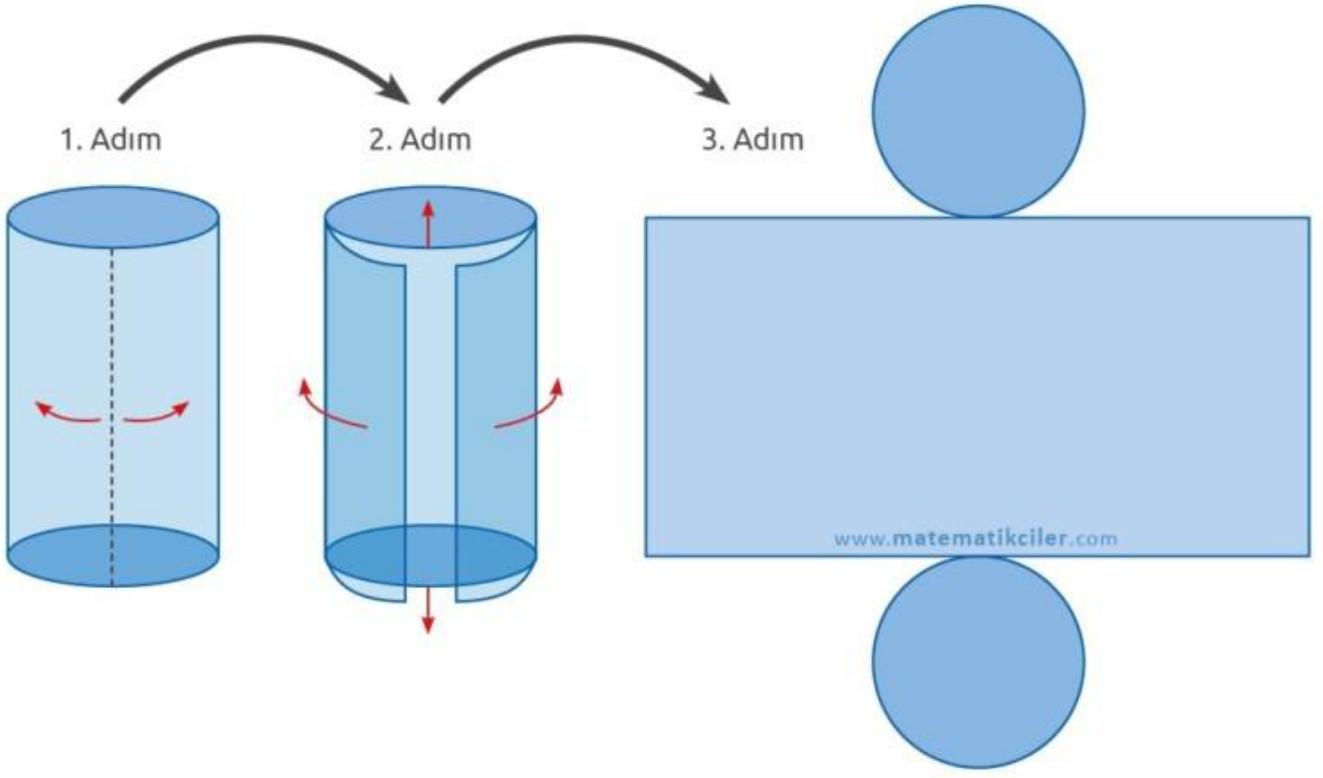


www.matematikciler.com

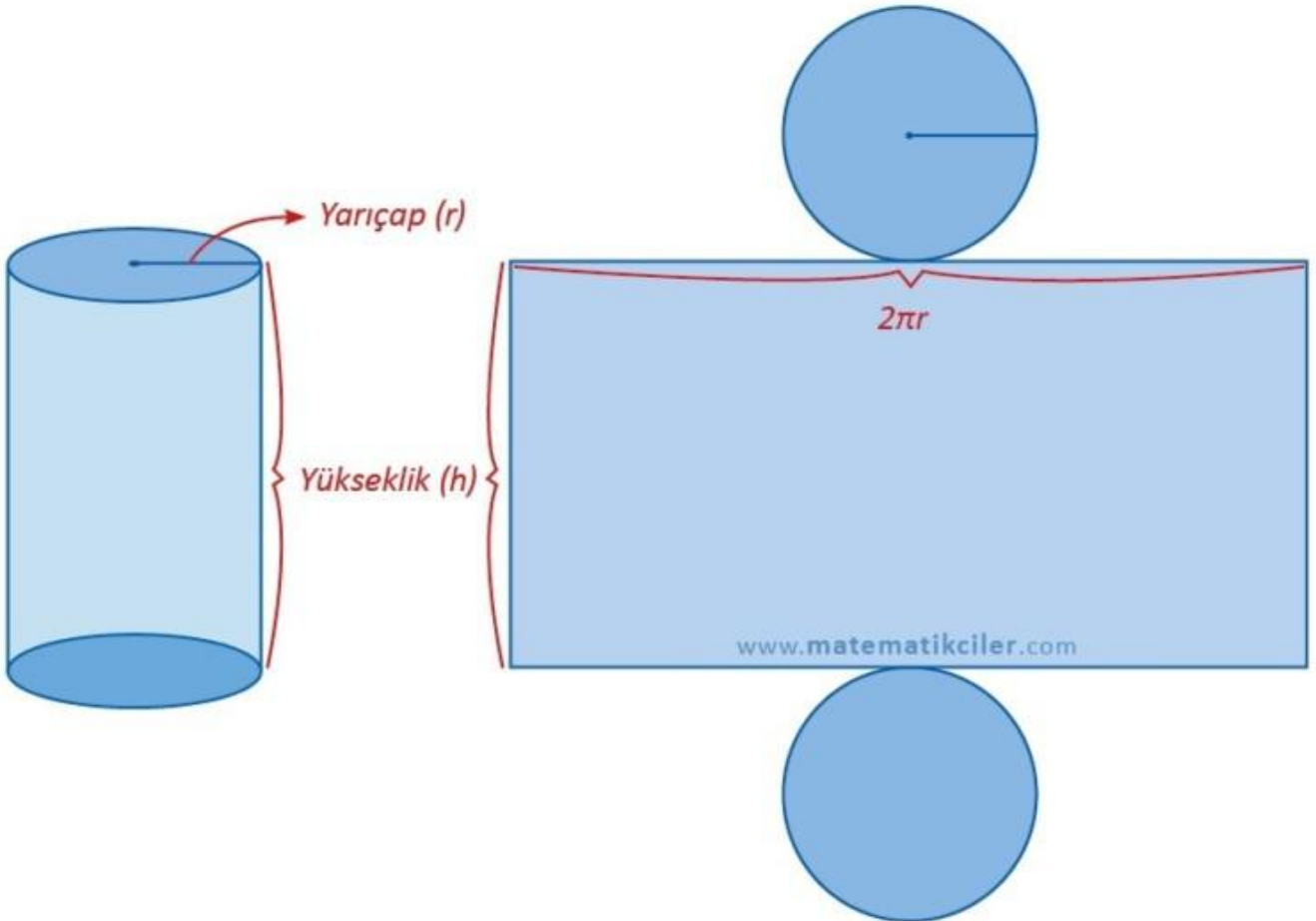
Silindirin köşesi ve ayrıtı yoktur. 2 tabanı ve bir yanal yüzeyi vardır.

DİK DAİRESEL SİLİNDİRİN AÇINIMI

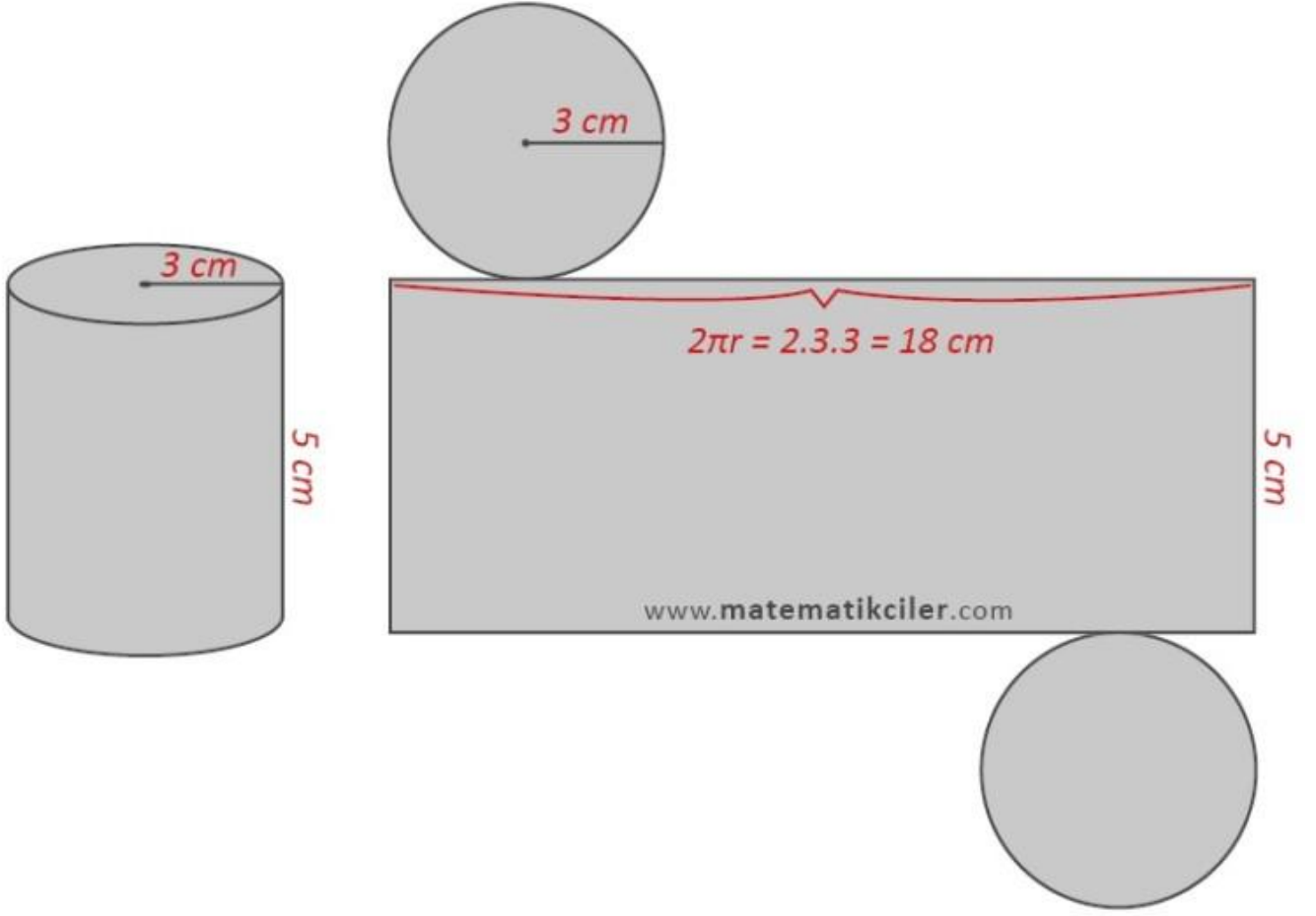
Silindirin açınımında; tabanları oluşturan **2 adet eş daire**, yanal yüzeyi oluşturan **1 adet dikdörtgen** yer alır.



Silindirin yanal yüzeyini oluşturan dikdörtgenin bir kenarının uzunluğu **silindirin yüksekliği** uzunluğunda, diğer bir kenarı ise **silindirin tabanının çevresi** uzunluğundadır.

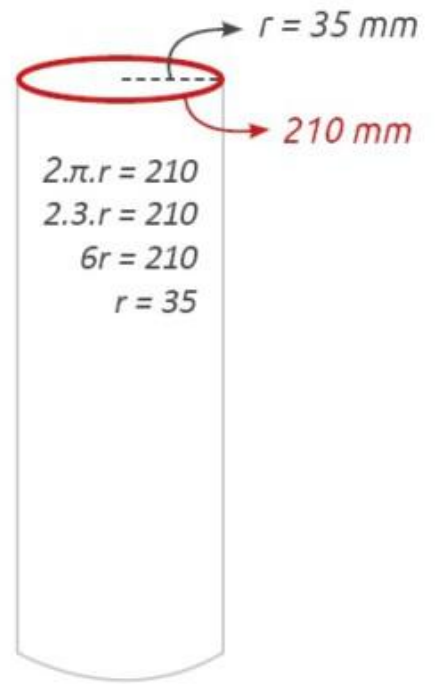


ÖRNEK: Aşağıda yüksekliği 5 cm, taban yarıçapı 3 cm olan bir dik dairesel silindirin açılımı verilmiştir. (Örnekte $\pi = 3$ olarak alınmıştır.)



ÖRNEK: Bir A4 kağıdını (297 mm x 210 mm) uzun kenarları çakışacak şekilde rulo halinde katlarsa taban yarıçapı kaç cm olur bulalım. (π yerine 3 alınacaktır.)

A4 kağıdının uzun kenarları çakışacağı için silindirin yüksekliği 297 mm olacaktır. Kısa kenarı ise kıvrılıp tabandaki çemberin çevresine eşit olacaktır. Bu yüzden çemberin çevresini 210'a eşitleriz ve yarıçapını 35 mm olarak buluruz.



--	--

Silindirin Yüzey Alanı

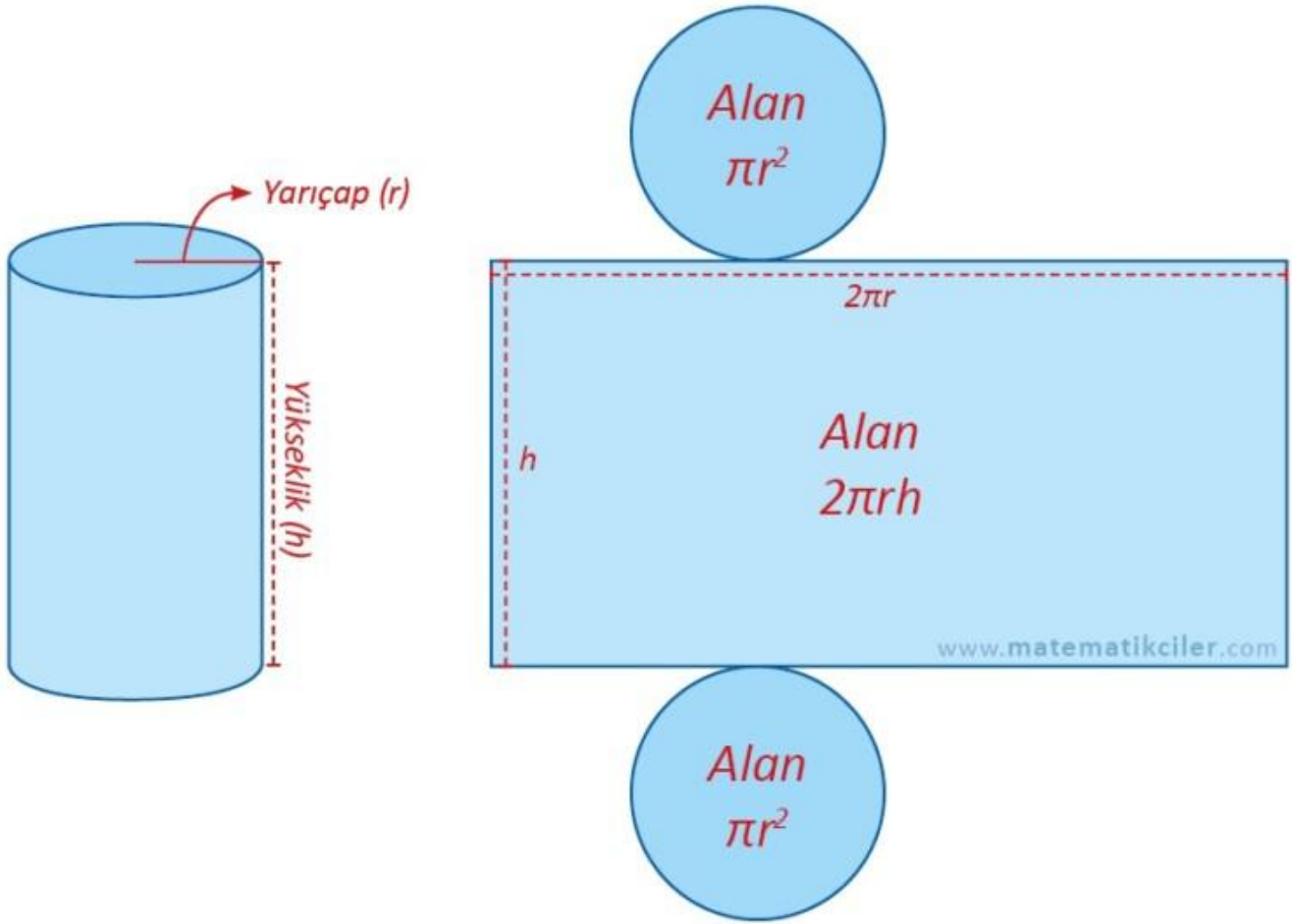
BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

- √ Silindirin taban alanı
- √ Silindirin yanal yüzey alanı
- √ Silindirin yüzey alanı

Dik dairesel silindirin yüzey alanı, taban alanları ile yanal yüzeyin alanının toplamına eşittir.

Silindirin Yüzey Alanı = 2 . Taban Alanı + Yanal Yüzey Alanı

Silindirin açınımında 2 tane daire ve 1 tane dikdörtgen olduğunu biliyoruz. O zaman silindirin yüzey alanını bulurken bu bölgelerin alanlarını bulup toplarız.



Silindirin Yüzey Alanı Formülü

Silindirin Taban Alanı = πr^2

Silindirin Yanal Yüzey Alanı = $2 \pi r h$

Silindirin Yüzey Alanı = (2 . Taban Alanı) + (Yanal Yüzey Alanı)

Silindirin Yüzey Alanı = $2 \pi r^2 + 2 \pi r h$

ÖRNEK: Yarıçapı 4 cm, yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulalım. (π yerine 3 alınacak)

Silindirin Taban Alanı = $3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48 \text{ cm}^2$

Silindirin Yanal Alanı = $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2$

Silindirin Yüzey Alanı = (2.Taban Alanı) + (Yanal Yüzey Alanı)

Silindirin Yüzey Alanı = (2.48) + (240) = 336 cm^2

ÖRNEK: Çapı ve yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulalım.

Soruda çapı 10 cm verildiği için yarıçap $r = 5 \text{ cm}$ olur. Ayrıca soruda π yerine kullanılacak bir değer verilmediği için formülde π olarak bırakacağız.

$$\text{Silindirin Yüzey Alanı} = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10$$

$$= 50\pi + 100\pi = 150\pi \text{ cm}^2$$

ÖRNEK: Yarıçapı 7 cm, yüksekliği 1 cm olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulalım. (π yerine $\frac{22}{7}$ alınacak)

$$\text{Silindirin Yüzey Alanı} = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h$$

$$= 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7^2 + 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 1 = 352 \text{ cm}^2$$

Silindirin Hacmi

BU KONUDA ÖĞRENECEKLERİMİZ:

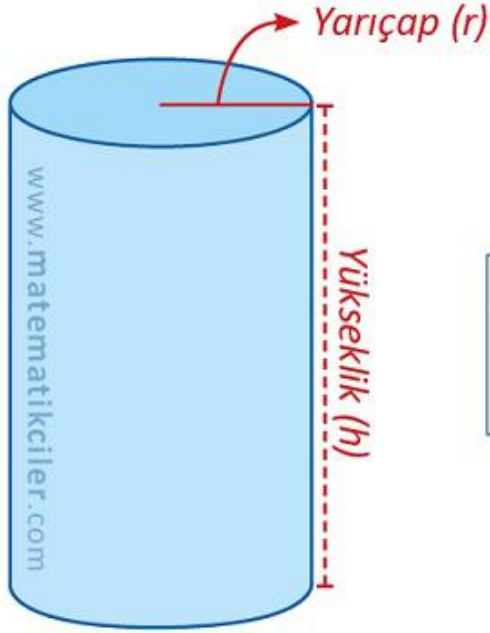
- √ Silindirin hacmi
- √ Silindirin hacim formülü

Silindirin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

Silindirin Hacmi = Taban Alanı . Yükseklik

Silindirin hacmi bulunurken aynı prizmalarda olduğu gibi taban alanı ile yükseklik uzunluğu çarpılır.

Silindirin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.



$V = \text{Taban Alanı} \cdot \text{Yükseklik}$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

www.matematikciler.com

Silindirin Hacim Formülü

Dik dairesel silindirin tabanı daire şeklindedir. Bu yüzden hacim formülünde taban alanı yerine dairenin alanını veren ifade (πr^2) yazılabilir.

Silindirin Hacmi = Taban Alanı . Yükseklik

Dik Dairesel Silindirin Hacmi = $\pi r^2 h$

ÖRNEK: Yarıçapı 4 cm, yüksekliği 6 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulalım. (π yerine 3 alınacak)

$$\text{Silindirin Hacmi} = \pi r^2 h = 3 \cdot 4^2 \cdot 6 = 288 \text{ cm}^3$$

ÖRNEK: Çapı ve yüksekliği 10 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulalım.

Soruda çapı 10 cm verildiği için yarıçap $r = 5$ cm olur. Ayrıca soruda π yerine kullanılacak bir değer verilmediği için formülde π olarak bırakacağız.

$$\text{Silindirin Hacmi} = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi \text{ cm}^3$$

ÖRNEK: Yarıçapı 7 cm, yüksekliği 4 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulalım. (π yerine $\frac{22}{7}$ alınacak)

$$\text{Silindirin Hacmi} = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \cdot 7^2 \cdot 4 = 616 \text{ cm}^3$$

ÖRNEK: Hacmi 1500 cm^3 olan dik dairesel koninin yüksekliği 5 cm ise yarıçapını bulalım. (π yerine 3 alınacak)

$$\pi r^2 h = \text{Silindirin Hacmi}$$

$$3 \cdot r^2 \cdot 5 = 1500$$

$$15 r^2 = 1500$$

$$r^2 = 100$$

$$r = 10 \text{ cm}$$